Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central
Juan Santos Atahualpa

RESISTENCIA DE MATERIALES II

TEXTO UNIVERSITARIO DE CARÁCTER TEÓRICO Y PRÁCTICO

1) DIAGRAMAS DE FUERZAS DE SECCIÓN

LOGRO DE LA UNIDAD: Determina los diagramas de fuerzas internas que ocurren las estructuras isostáticas mediante métodos prácticos como el método numérico (método de áreas).

2) MÉTODO DE DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS (HARDY CROSS)

LOGROS DE LA UNIDAD: Determina los diagramas de fuerzas internas que ocurren en las estructuras hiperestáticas mediante el método de distribución de momentos.

MS. ING. MARCOS JOSUE RUPAY VARGAS

mrupay@uniscjsa.edu.pe
marcosrv9@gmail.com

Universidad Nacional
Intercultural de la
Selva Central

Juan Santos Atahualpa

OBJETIVOS

1) DIAGRAMAS DE FUERZAS DE SECCIÓN

OBJETIVO: Determinar los diagramas de fuerzas internas que ocurren las estructuras isostáticas mediante métodos prácticos como el método numérico (método de áreas).

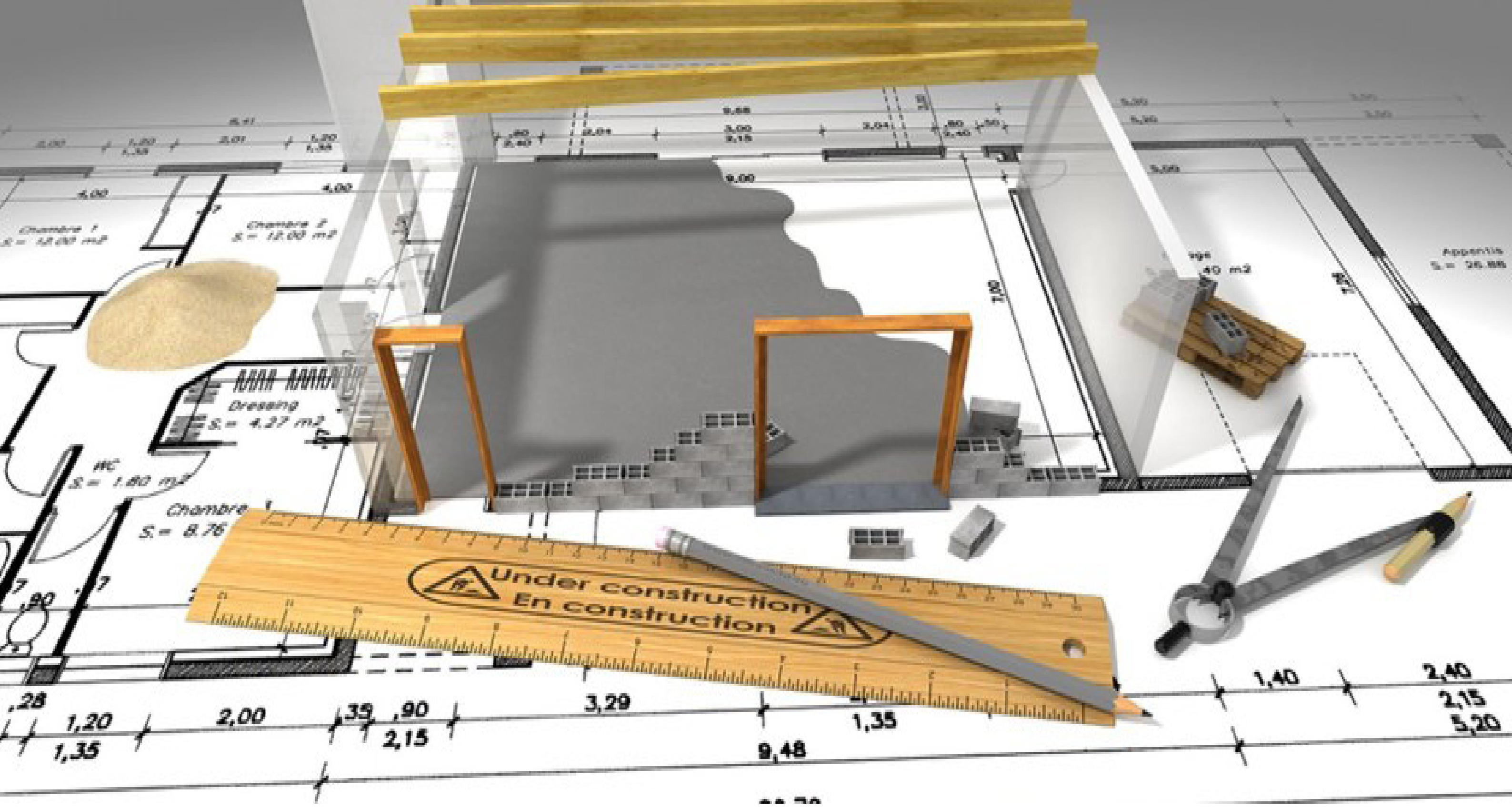
2) MÉTODO DE DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS (HARDY CROSS)

OBJETIVO: Determinar los diagramas de fuerzas internas que ocurren en las estructuras hiperestáticas mediante el método de distribución de momentos.

CONTENIDO

TEMA 1

Desarrollo Didáctico del Tema



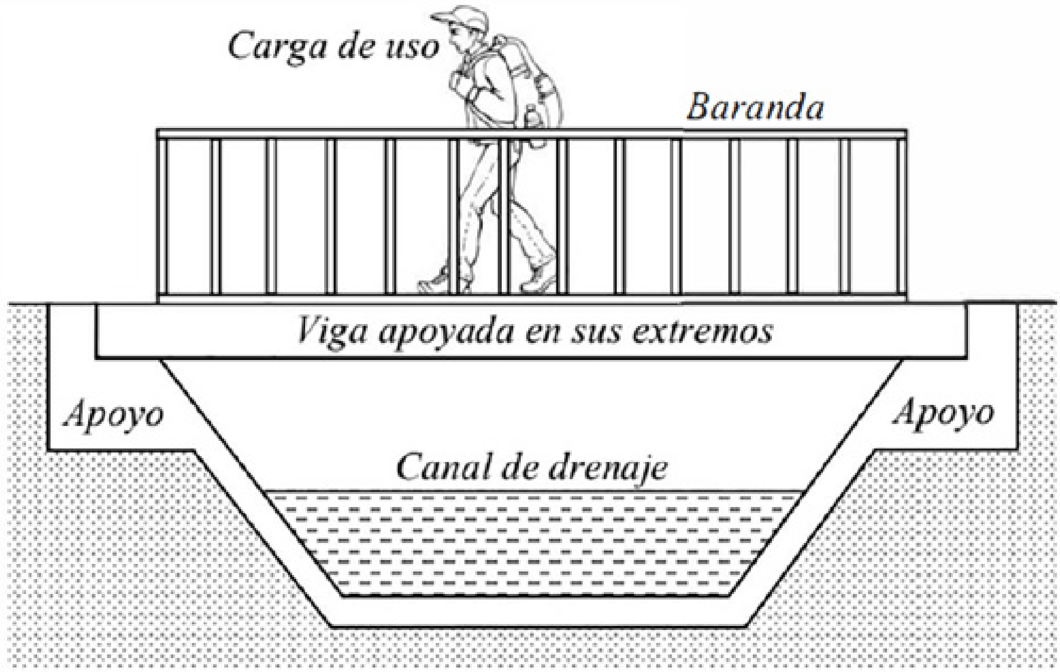
DIAGRAMAS DE FUERZAS DE SECCIÓN

CONTENIDO

FUERZAS DE SECCIÓN EN VIGAS

CONCEPTO DE VIGA

Es un sistema estructural simple utilizado para cubrir espacios abiertos o para salvar el tránsito en terrenos con depresiones como quebradas y ríos.



Puente peatonal

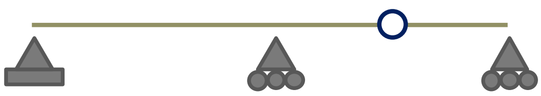
FUERZAS DE SECCIÓN EN VIGAS

CLASIFICACIÓN DE VIGAS

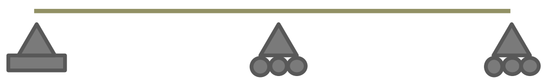
Viga biapoyada en sus extremos

Viga biapoyada con voladizos

Viga empotrada en voladizo



Viga compuesta o Gerber



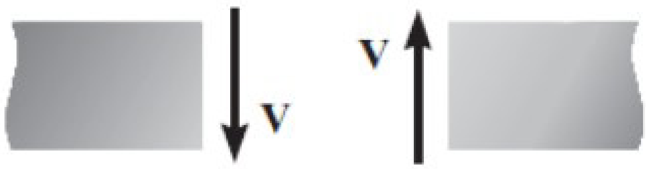
Viga continua

FUERZAS DE SECCIÓN EN VIGAS

FUERZAS INTERNAS EN UNA VIGA

- (Fuerza Normal).
- Fuerza cortante.
- Momento flec

Fuerza cortante: el signo es positivo si al tomar las fuerzas de sección del lado derecho del elemento, la fuerza actuante tiene dirección "hacia arriba". En otras palabras, una fuerza cortante positiva ocasionará que el segmento de viga sobre el que actúa gire en el sentido de las manecillas del reloj (Hibberler, R.C).



FUERZAS DE SECCIÓN EN VIGAS

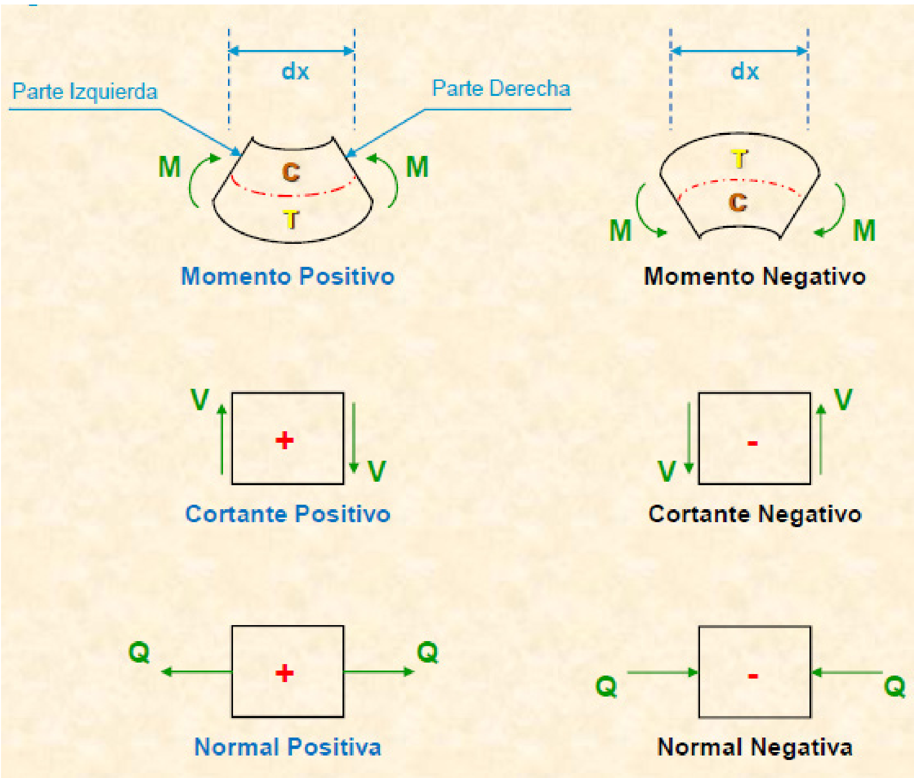
FUERZAS INTERNAS EN UNA VIGA

Momento flector: se considera positivo el momento flector que produce tracción en la fibra inferior. En ingeniería civil, los diagramas se dibujan del lado de la fibra a tracción (positivo hacia abajo); esta convención ayuda a dibujar la deformada de la estructura y, en el caso del concreto armado, a definir la zona donde se requiere el refuerzo de varillas de acero.

Momento positivo

FUERZAS DE SECCIÓN EN VIGAS

CONVECCIÓN DE SIGNOS



FUERZAS DE SECCIÓN EN VIGAS

MÉTODOS DE ANÁLISIS

- Método analítico.
- Método gráfico (Método de cálculo de reacciones).
- Cálculo de reacciones a partir de las fuerzas cortantes.

a) Esfuerzo Normal

Tramo	x	N
1-2	x_1	N_1
	.	.
	x_n	N_n
2-3	x_n	N_n
	.	.
	x_m	N_m

b) Esfuerzo Cortante

Tramo	x	Q
1-2	x_1	Q_1
	.	.
	x_n	Q_n
2-3	x_n	Q_n
	.	.
	x_m	Q_m

c) Momento Flector

Tramo	x	M
1-2	x_1	M_1
	.	.
	x_n	M_n
2-3	x_n	M_n
	.	.
	x_m	M_m

FUERZAS DE SECCIÓN EN VIGAS

MÉTODOS DE ANÁLISIS

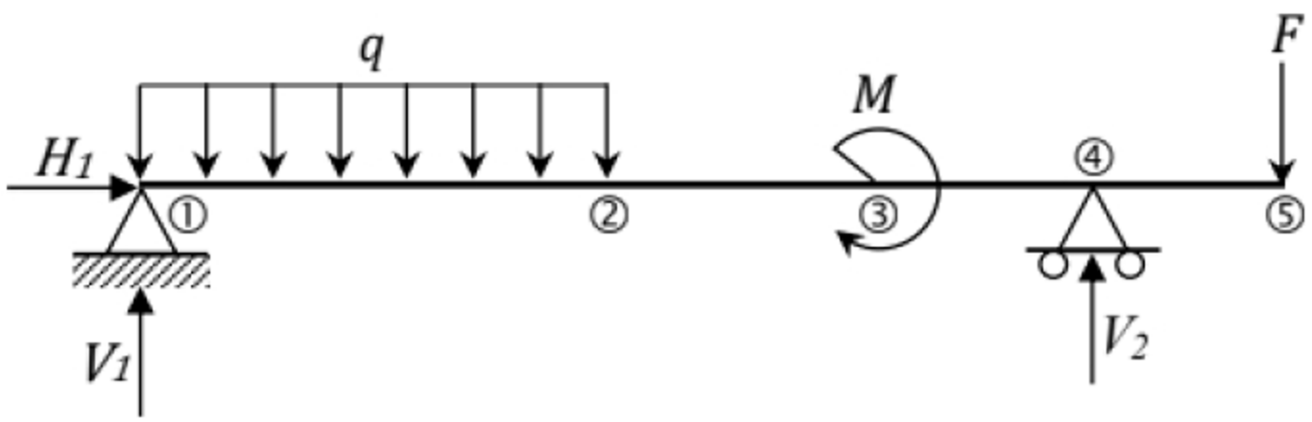
En el siguiente cuadro se resumen los tipos de funciones según las cargas que soportan:

Carga	*Tipos de Funciones*	
	Esfuerzo Cortante	*Momento Flector*
Rectangular	lineal	Cuadrática
Triangular	Cuadrática	Cúbica
Trapezoidal	Cuadrática	Cúbica
Fuerza Puntual	Constante	Lineal
Momento Puntual	Constante	Lineal

FUERZAS DE SECCIÓN EN VIGAS

MÉTODOS ANALÍTICO

Este método se sustenta en expresiones matemáticas deducidas a partir de expresiones geométricas que dependen de las características de la viga y de sus cargas.
Para estudiar la variación de las fuerzas internas (N, Q y M) se deberá definir secciones genéricas (s-s) definidas en su posición por una variable "x" que permita definir una o varias funciones para cada esfuerzo interno.



FUERZAS DE SECCIÓN EN VIGAS

MÉTODO GRÁFICO

1. Método practico, que se debe seguir la siguiente secuencia.
2. Calcular las reacciones.
   - Enumerar los nudos de la viga para el respectivo análisis.
   - Donde existan apoyos
   - Donde existan fuerzas y momentos puntuales
   - Donde existan articulaciones
   - Al inicio y final de toda carga distribuida
3. Calcular las fuerzas cortantes y graficar el diagrama.
4. Calcular los momentos flectores y graficar el diagrama

FUERZAS DE SECCIÓN EN VIGAS

MÉTODO REACCIONES A PARTIR DE FUERZAS CORTANTES

Cuando se tiene una viga de varios tramos, es posible hallar primero las fuerzas cortantes en los extremos de cada tramo, lo que permite hallar las reacciones y dibujar el DFC. Para hacerlo, se propone la siguiente tabulación:

Luz de cada tramo

Momento en cada apoyo

Corrección por momentos

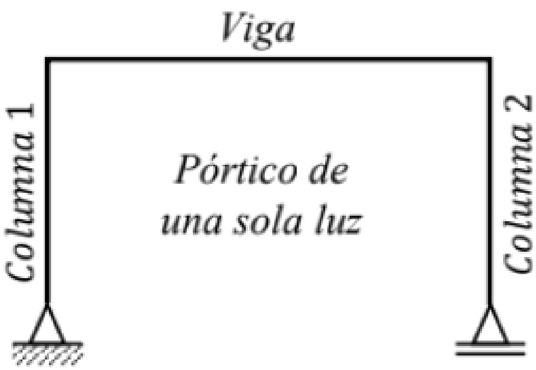
F.C. “isostática”

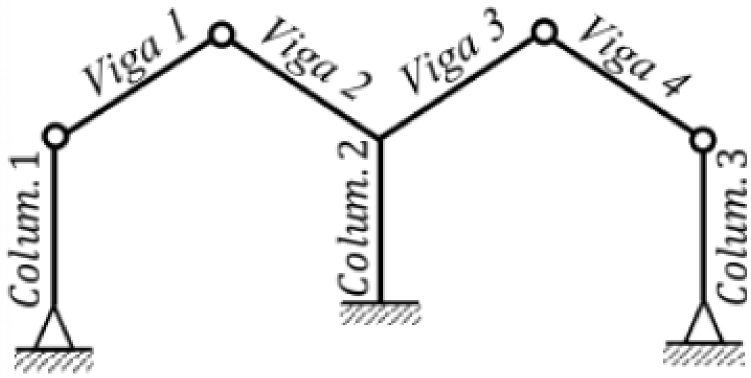
F.C. final

FUERZAS DE SECCIÓN EN PÓRTICOS

CONCEPTO DE PÓRTICO

Es un sistema estructural compuesto de columnas y vigas formando un marco resistente capaz de soportar cargas para luego transmitirlas al suelo.

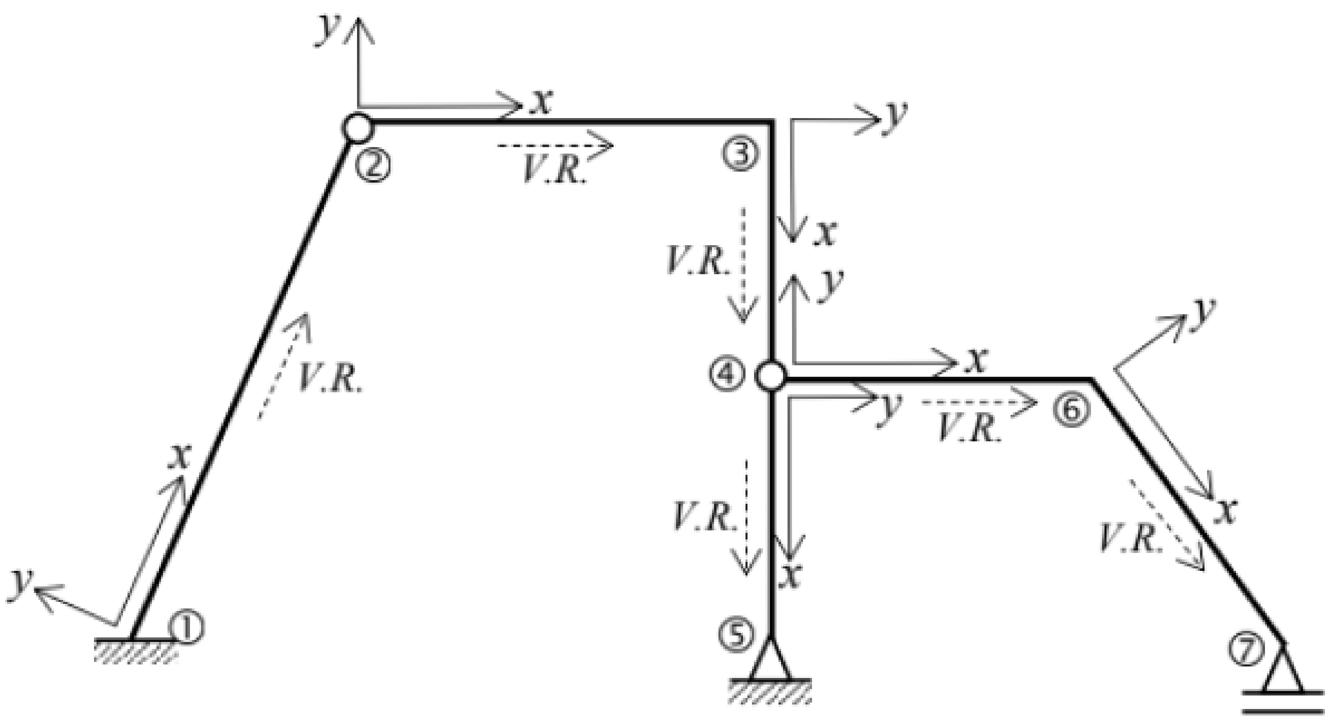




Pórtico de dos luces o tramos

FUERZAS DE SECCIÓN EN PÓRTICOS

EJES DE REFERENCIA

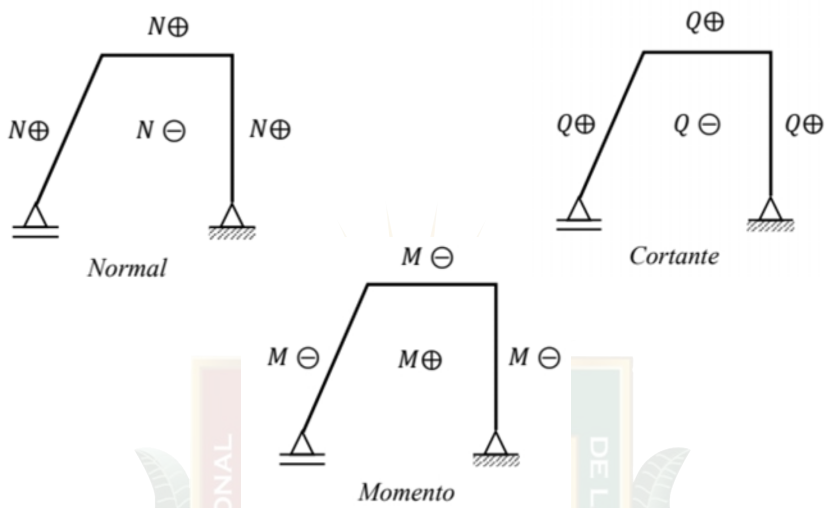


V.R. = Vector de recorrido

FUERZAS DE SECCIÓN EN PÓRTICOS

CONVENIO PARA DIAGRAMAR LOS ESFUERZOS INTERNOS

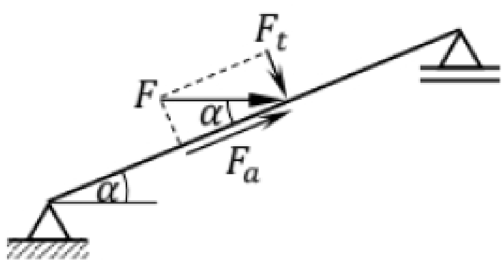
Es un sistema estructural compuesto de columnas y vigas formando un marco resistente capaz de soportar cargas para luego transmitirlas al suelo.



FUERZAS EN ELEMENTOS INCLINADOS

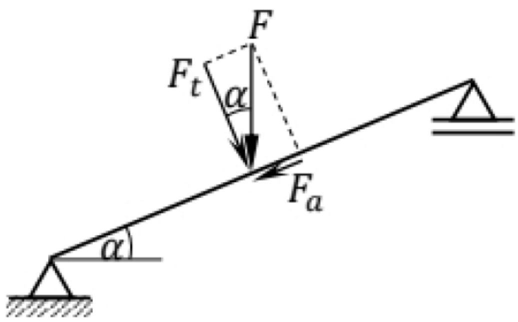
TRANSFORMACIÓN DE CARGAS

CARGA PUNTUAL HORIZONTAL



$$Fa = F \cdot cos(\alpha)$$
$$Ft = F \cdot sen(\alpha)$$

CARGA PUNTUAL VERTICAL

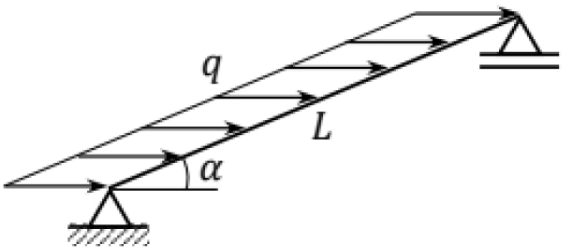


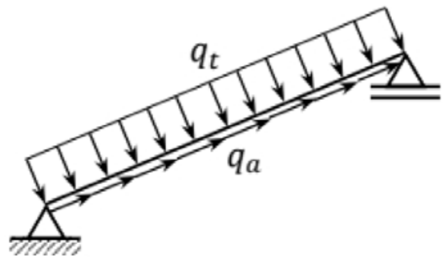
$$Fa = F \cdot sen(\alpha)$$
$$Ft = F \cdot cos(\alpha)$$

FUERZAS EN ELEMENTOS INCLINADOS

TRANSFORMACIÓN DE CARGAS

CARGA DISTRIBUIDA RECTANGULAR EN X



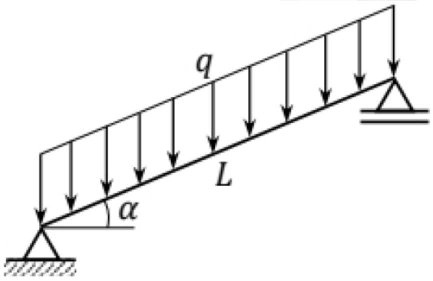


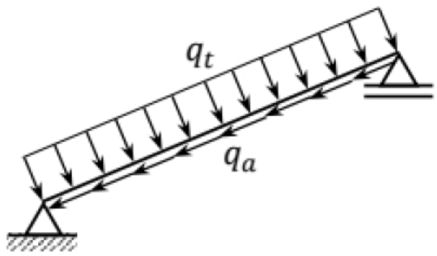
$$q_a = q \cdot cos(\alpha)$$
$$q_t = q \cdot sen(\alpha)$$

FUERZAS EN ELEMENTOS INCLINADOS

TRANSFORMACIÓN DE CARGAS

CARGA DISTRIBUIDA RECTANGULAR EN Y



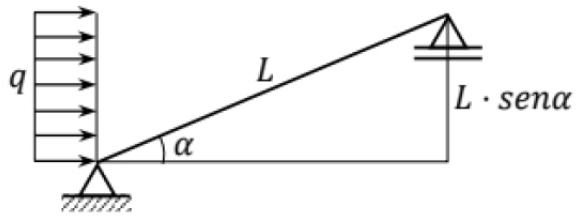


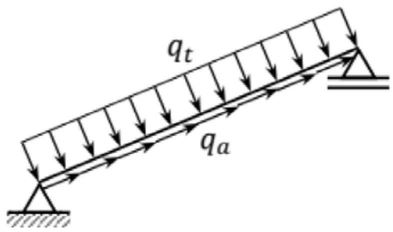
$$q_a = q \cdot sen(\alpha)$$
$$q_t = q \cdot cos(\alpha)$$

FUERZAS EN ELEMENTOS INCLINADOS

TRANSFORMACIÓN DE CARGAS

CARGA DISTRIBUIDA RECTANGULAR EN X PROYECTADAS EN Y



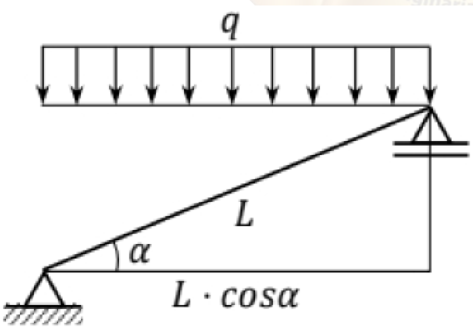


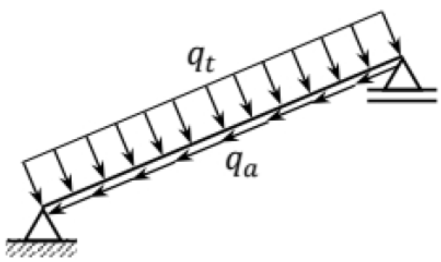
$$q_a = q \cdot sen(\alpha) \cdot cos(\alpha)$$
$$q_t = q \cdot sen^2(\alpha)$$

FUERZAS EN ELEMENTOS INCLINADOS

TRANSFORMACIÓN DE CARGAS

CARGA DISTRIBUIDA RECTANGULAR EN X PROYECTADAS EN Y



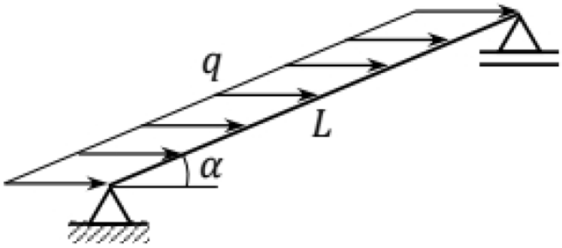


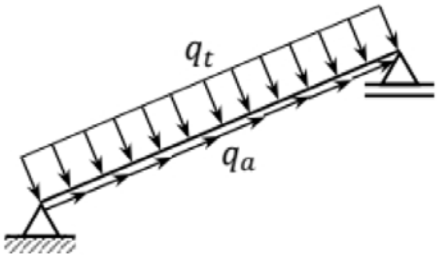
$$q_a = q \cdot sen(\alpha) \cdot cos(\alpha)$$
$$q_t = q \cdot cos^2(\alpha)$$

FUERZAS EN ELEMENTOS INCLINADOS

TRANSFORMACIÓN DE CARGAS

CARGA DISTRIBUIDA RECTANGULAR EN X



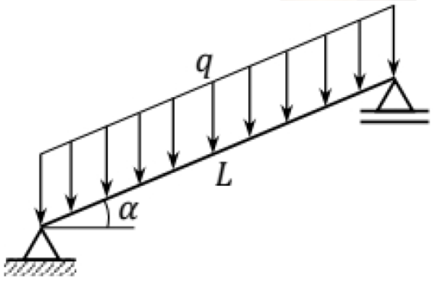


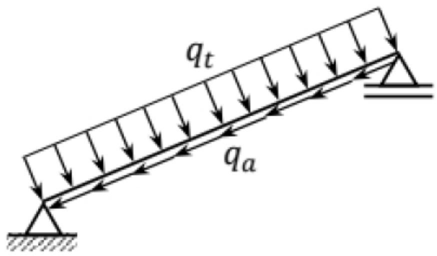
$$q_a = q \cdot cos(\alpha)$$
$$q_t = q \cdot sen(\alpha)$$

FUERZAS EN ELEMENTOS INCLINADOS

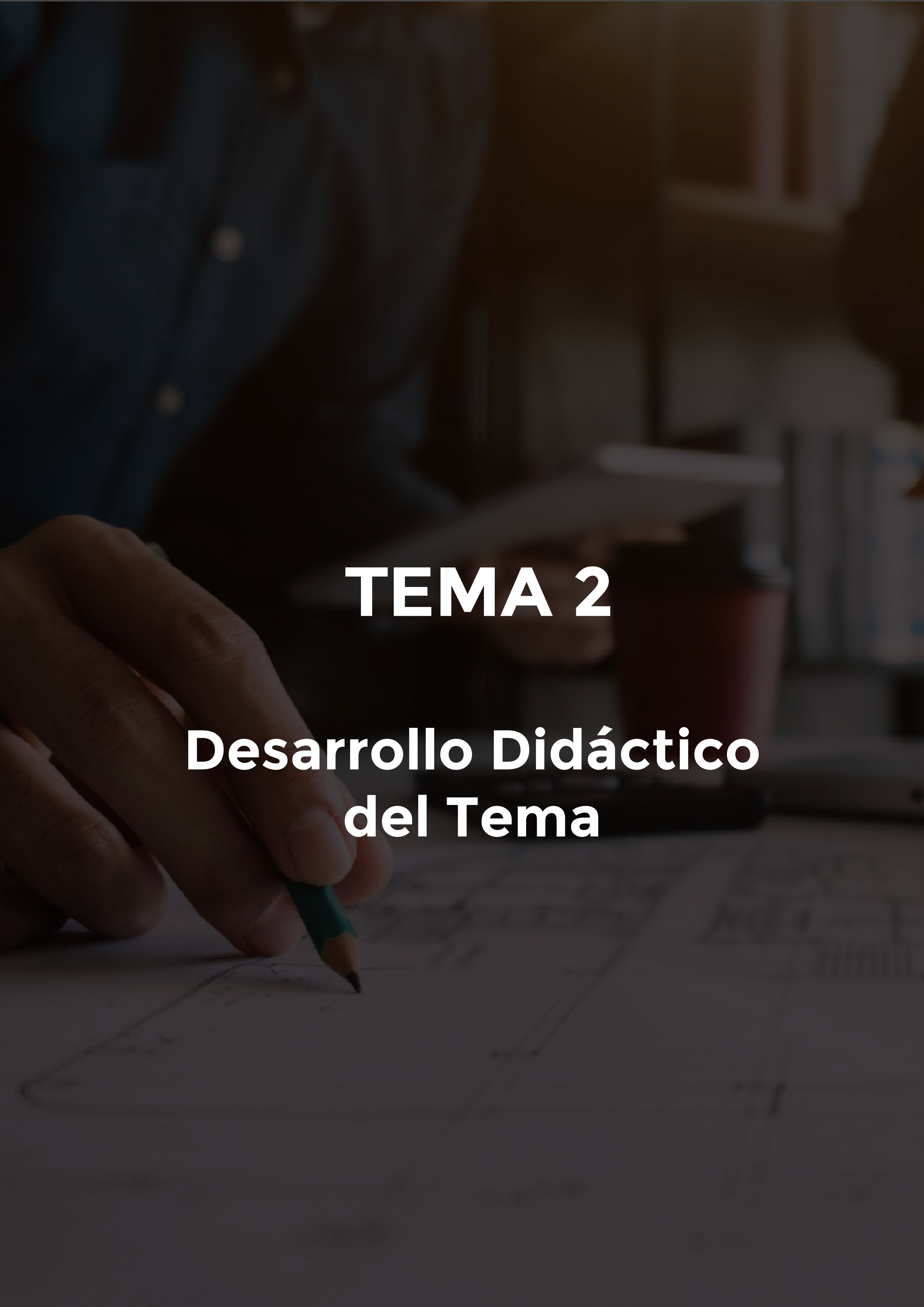
TRANSFORMACIÓN DE CARGAS

CARGA DISTRIBUIDA RECTANGULAR EN Y





$$q_a = q \cdot sen(\alpha)$$
$$q_t = q \cdot cos(\alpha)$$



TEMA 2

Desarrollo Didáctico del Tema

MÉTODO DE LA DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El análisis de las estructuras indeterminadas recibió gran impulso en 1930, año en que el profesor Hardy Cross (1885 - 1959) de la Universidad de Illions, presentó su Método de Distribución de Momentos.

La idea genial de Cross fue la de desarrollar el Método de Rigidez, tomando como incógnitas los momentos en los extremos de las barras (elementos) que conforman la estructura y obtener de manera iterativa dicho conjunto de incógnitas.

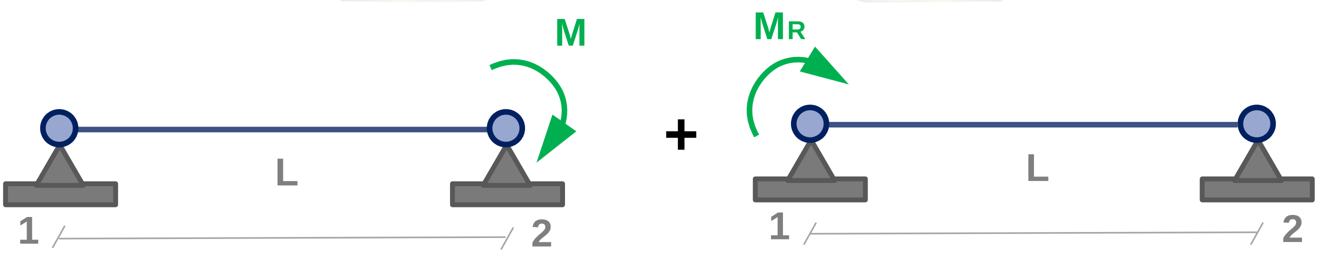
Esto significa que las iteraciones se llevan a cabo sobre los momentos en los extremos de las barras hasta lograr el equilibrio de los nudos y por ende de la estructura.

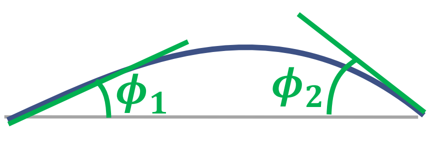
FACTORES DE TRANSPORTE

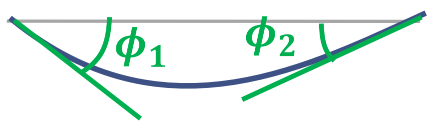
En una barra empotrada - articulada, se aplica un momento "M" en el extremo que puede girar. En el extremo contrario (el empotramiento) se genera un momento de respuesta "M_R" tal que el ángulo $Ø_1$ en dicho apoyo es igual a cero.

$$\phi_1 = 0$$

La deformación angular (rotación), es originada por "M", es anulada al llegar al empotramiento por "MR", tal que:







$$\phi_1 = \frac{ML}{6EI} \qquad \phi_2 = \frac{ML}{3EI}$$

$$\phi_1 = \frac{M_R L}{3EI} \qquad \phi_2 = \frac{M_R L}{6EI}$$

FACTORES DE TRANSPORTE

$$\phi_1(M) - \phi_1(M_R) = 0$$

$$\frac{ML}{6EI} - \frac{M_R L}{3EI} = 0$$

Por lo tanto:

$$M_R = \frac{M}{2}$$

CONCLUSIONES

1. Podemos concluir que el factor de transporte es:

$$f_{TRANS} = \frac{M}{2}$$

CONCLUSIONES

2. Cada vez que en una barra empotrada - articulada, apliquemos un momento en el extremo articulado, éste afectará al extremo empotrado en el que se producirá un momento de igual sentido que el momento original y con la mitad de su magnitud.
3. Por otra parte, en el extremo articulado, el valor del ángulo será:

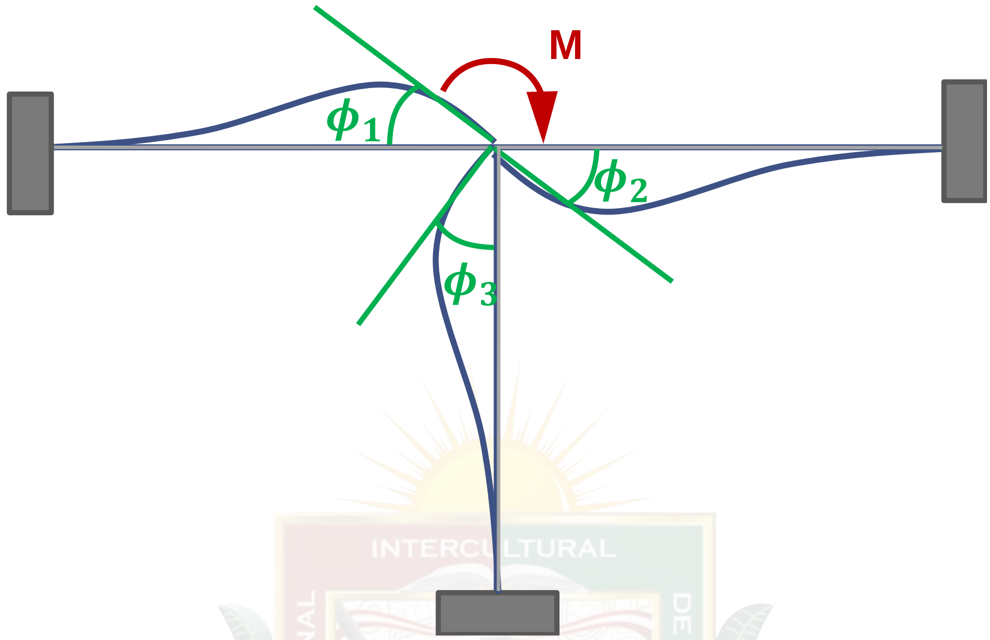
$$\phi_2 = \frac{ML}{3EI} - \frac{M_R L}{6EI}$$

siendo: $M_R = \frac{M}{2}$ tenemos:

$$\phi_2 = \frac{ML}{3EI} - \frac{ML}{12EI}$$

por lo tanto: $\phi_2 = \frac{ML}{4EI}$

RIGIDEZ Y FACTORES DE DISTRIBUCIÓN

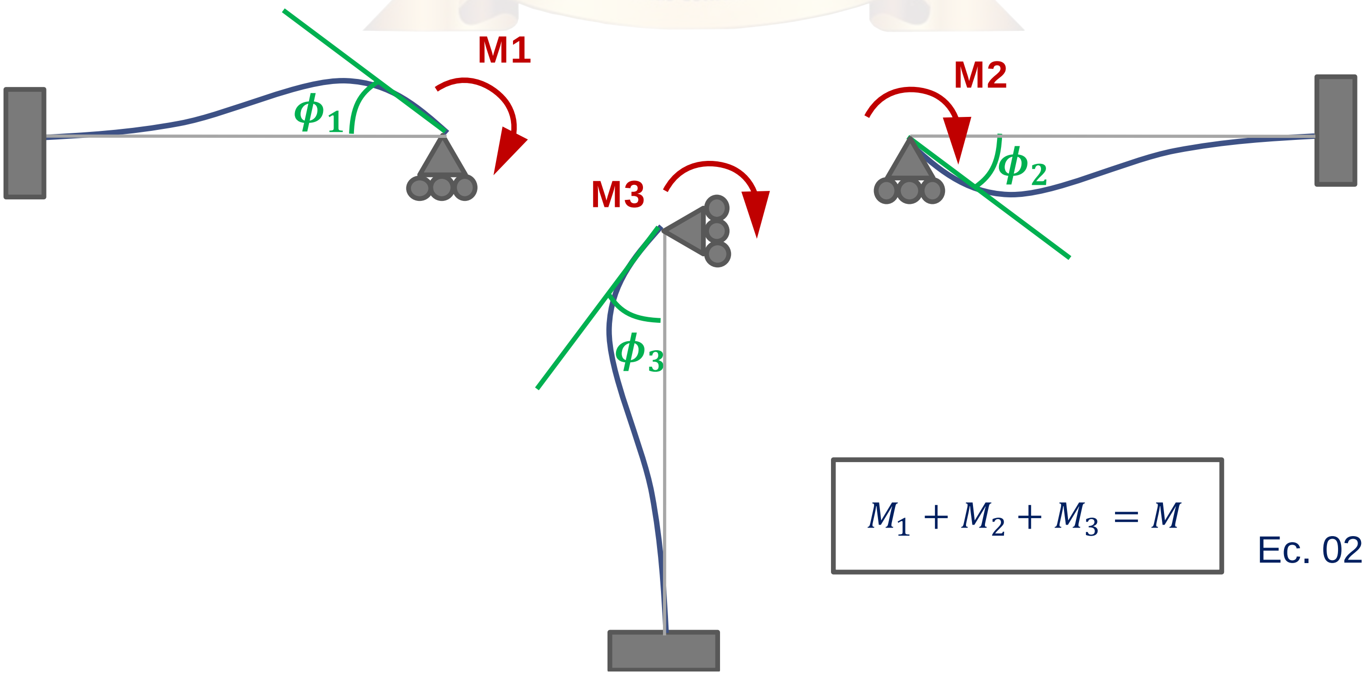


Al aplicar un momento a un nudo rígido, este gira tal que:

$$\boxed{\phi_1 = \phi_2 = \phi_3}$$

Ec. 01

Por otra parte, cada una de las barras se hace cargo de una parte del momento solicitante para equilibrarlo, siendo



$$\boxed{M_1 + M_2 + M_3 = M}$$

Ec. 02

RIGIDEZ Y FACTORES DE DISTRIBUCIÓN

Al aplicar un momento a un nudo rígido, este gira tal que:

$$\phi_1 = \frac{M_1 L_1}{4EI} \qquad \phi_2 = \frac{M_2 L_2}{4EI} \qquad \phi_3 = \frac{M_3 L_3}{4EI}$$

En esta relación, la deformación angular $\emptyset_1$ es directamente proporcional al momento solicitante "M" y a la capacidad de deformarse de la barra, o flexibilidad $L/4EL$.

Llamaremos "f" a la flexibilidad de la barra y rigidez a su valor inverso: k = 1/f

Siendo 4 un valor constante, podemos simplificar esa expresión, trabajando con un coeficiente de rigidez $K = EI/L$, o simplemente $K_{efectivo} = I/L$, ya que lo usual es que todas las barras del nudo sean de la misma materialidad.

De esta forma, el valor de los ángulos o giros de las barras serán:

$$\phi_1 = \frac{M_1}{k_1} \qquad \phi_2 = \frac{M_2}{k_2} \qquad \phi_3 = \frac{M_3}{k_3}$$

Ec. 03

y combinando Ec.01 con Ec. 03

$$\frac{M_1}{k_1} = \frac{M_2}{k_2} = \frac{M_3}{k_3}$$

Ec. 04

Expresaremos todos los momentos en función de M_1:

$$M_2 = \frac{M_1 \times k_2}{k_1} \qquad M_3 = \frac{M_1 \times k_3}{k_1}$$

Y reemplazamos en la Ec. 0

$$M = M_1 + \frac{M_1 k_2}{k_1} + \frac{M_1 k_3}{k_1}$$

Desarrollando esta expresión:

$$M = \frac{M_1 k_1 + M_1 k_2 + M_1 k_3}{k_1} = \frac{M_1 (k_1 + k_2 + k_3)}{k_1}$$

Por lo tanto:

$$M_1 = M \times \frac{k_1}{(k_1 + k_2 + k_3)}$$

$$M_2 = M \times \frac{k_2}{(k_1 + k_2 + k_3)}$$

$$M_3 = M \times \frac{k_3}{(k_1 + k_2 + k_3)}$$

CONCLUSIONES

Al aplicar un momento en un nudo rígido éste será equilibrado por todas las barras que concurren al nudo, en proporción de sus rigideces ***EI/L o 1/L.***

Podemos determinar un "factor de distribución", para la participación de cada una de las barras concurrentes al nudo, tal que:

$$u_1 = \frac{k_1}{(k_1 + k_2 + k_3)}$$

generalizando tenemos:

$$u_1 = \frac{k_1}{\sum k} \qquad u_2 = \frac{k_2}{\sum k} \qquad u_3 = \frac{k_3}{\sum k}$$

1. Rigidez de una barra:

$$k_i = \frac{I_i}{L_i} \qquad \text{donde} \qquad : I = \text{momento de Inercia}$$
$$L = \text{long. de barra}$$

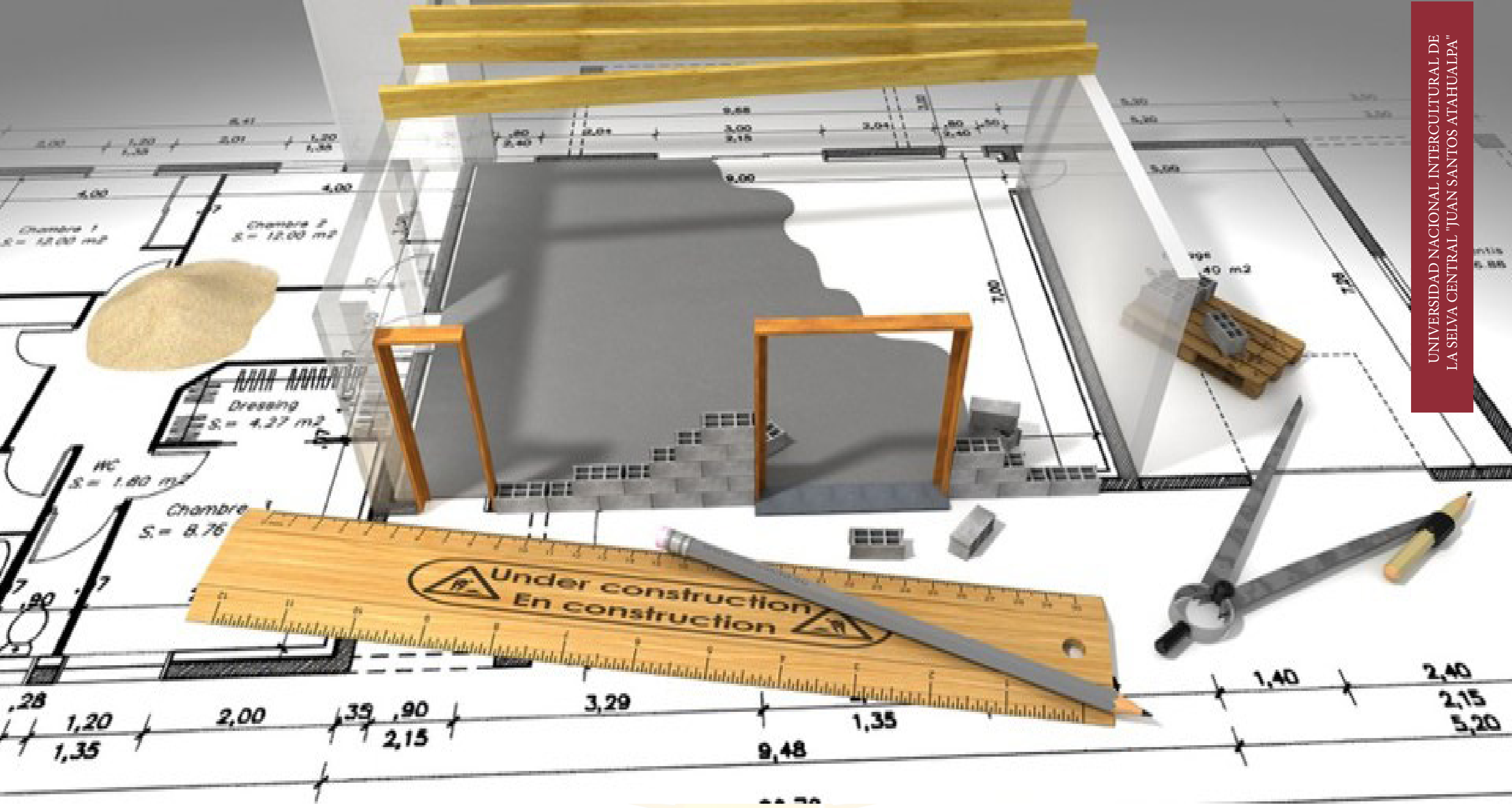
2. El factor de distribución (u) de una barra concurrente a un nudo es igual a su rigidez dividida entre la suma de las rigideces de las barras concurrentes en este nudo.

3. Los tramos de una viga continua que termina en un apoyo articulado, la rigidez de la barra será ¾ (k) – (en el caso que se utilice el método simplificado).

4. Cuando se utiliza el método normal la rigidez no se multiplica por ¾.

Persevera en tu empeño y hallarás lo que buscas, prosigue tu fin sin desviarte y alcanzarás tu objetivo, combate con energía y vencerás.

– Buda



EJEMPLOS Y EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

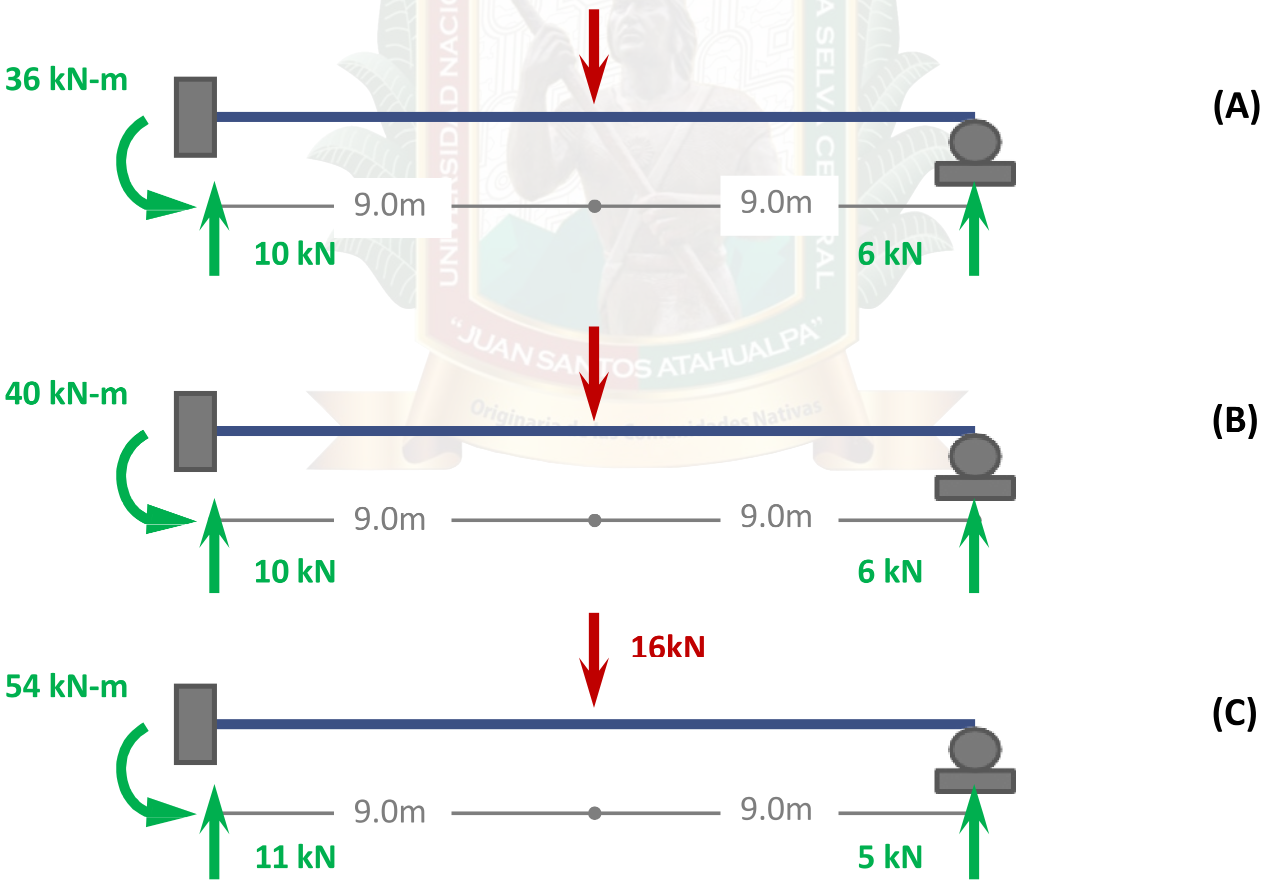
TEMA 01

TEMA 01

Se realiza la solución de ejercicios propuestos en prácticas calificadas y exámenes, paso a paso correspondiente al tema 01: Diagramas de Fuerzas de Sección de vigas continuas.

PREGUNTA N° 01:

¿Cuál de los tres resultados es la verdadera solución y por qué? (justificar su respuesta con demostraciones empleando las hipótesis del análisis estructural)



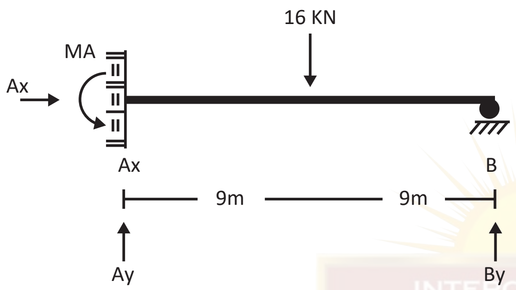
SOLUCIÓN

EJERCICIO #01: ¿cuál de los tres resultados es la verdadera solución y por qué? justifica su respuesta con demostraciones empleando las hipótesis de AE.

SOLUCION

1° PASO: la verdadera solución es la alternativa c

2° PASO: como todas las alternativas llevan la misma carga y los mismos apoyos. Analizaremos por el método de los tres momentos.



- Determina el G1:

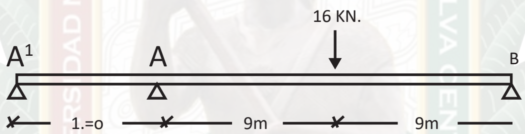
G1= R – A

G1= 4 – 1

G1= 1

∴ Observamos que es una viga HIPERESTAICA.

El método de 3 momentos nos dice cuando existe un apoyo empotrado se añade una luz imaginaria adyacente a empotramiento L= 0 , siempre apoyada en el apoyo opuesto y de I =∞



Analizando la viga:

TRAMO A'AB

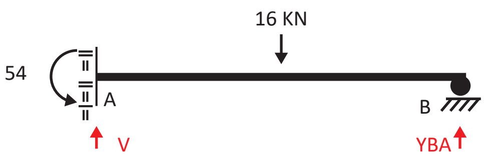
$$M_1L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3L_2 = Ga_1 - Ga_2$$

$$\cancel{M_A}(0) + 2M_A(0 + 18) + M_B * 18 = -\cancel{6(0)} - 6\left(\frac{16(18)^2}{16}\right.$$

$$36\, M_A + \cancel{18M_B} = 1944$$

Sabemos $M_B = 0$: $M_A = 54\, KN$

Analizando la viga original con el Resultado Obtenido



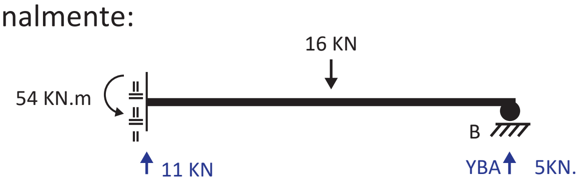
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$: $54 - 16(9) + 1BV_{BA} = 0$

$V_{BA} = 5KN$

$+\uparrow \sum F_Y = 0$: $Y_{AB} - 16 + 5 = 0$

$V_{AB} = 11KN$

Finalmente:



Queda demostrado que a respuesta correcta en la alternativa "C"

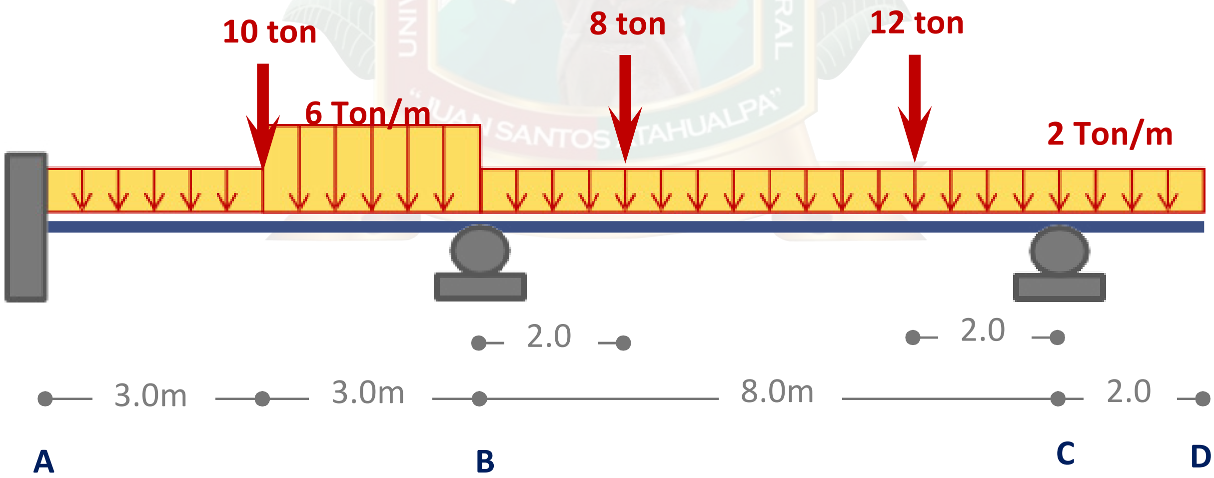
PREGUNTA N° 02:

La viga continua **ABCD** esta cometida a las cargas indicadas. El momento de empotramiento A es sentido antihorario, con el valor $M_A = 17.50\ t - m$, y se sabe que el momento en B produce tracción en el lado superior y tiene el valor $M_B = 31.29\ t - m$

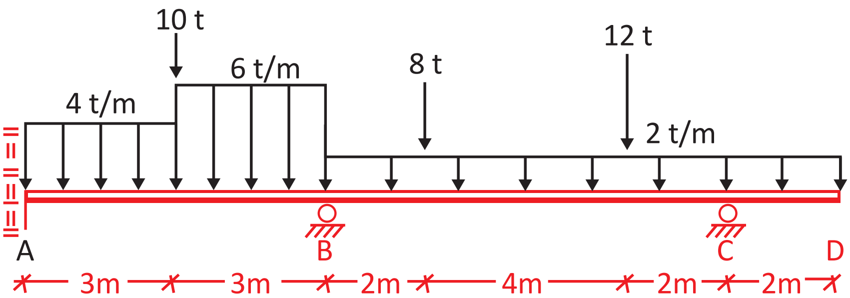
a. Dibuje los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores. (Método a emplear Cálculo de reacciones a partir de las fuerzas cortantes)

b. Acote la posición de los puntos de inflexión (Momentos flectores = 0) de los tramos AB y BC. (Método a utilizar a criterio del estudiante)

c. Obtenga la reacción en B mediante DCL (Concepto de equilibrio en barras) y el equilibrio



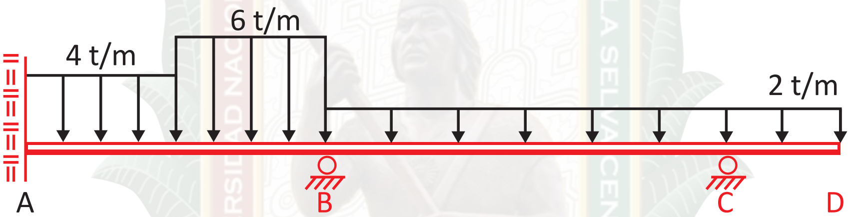
EJERCICIO #02:



a. Dibuja los DFC Y DMF . Método de Calculo de reacciones a partir de la fuerzas cortantes

$$M_A = 17{,}5\ tm \qquad M_B = 31{,}29\ tm$$

SOLUCIÓN:



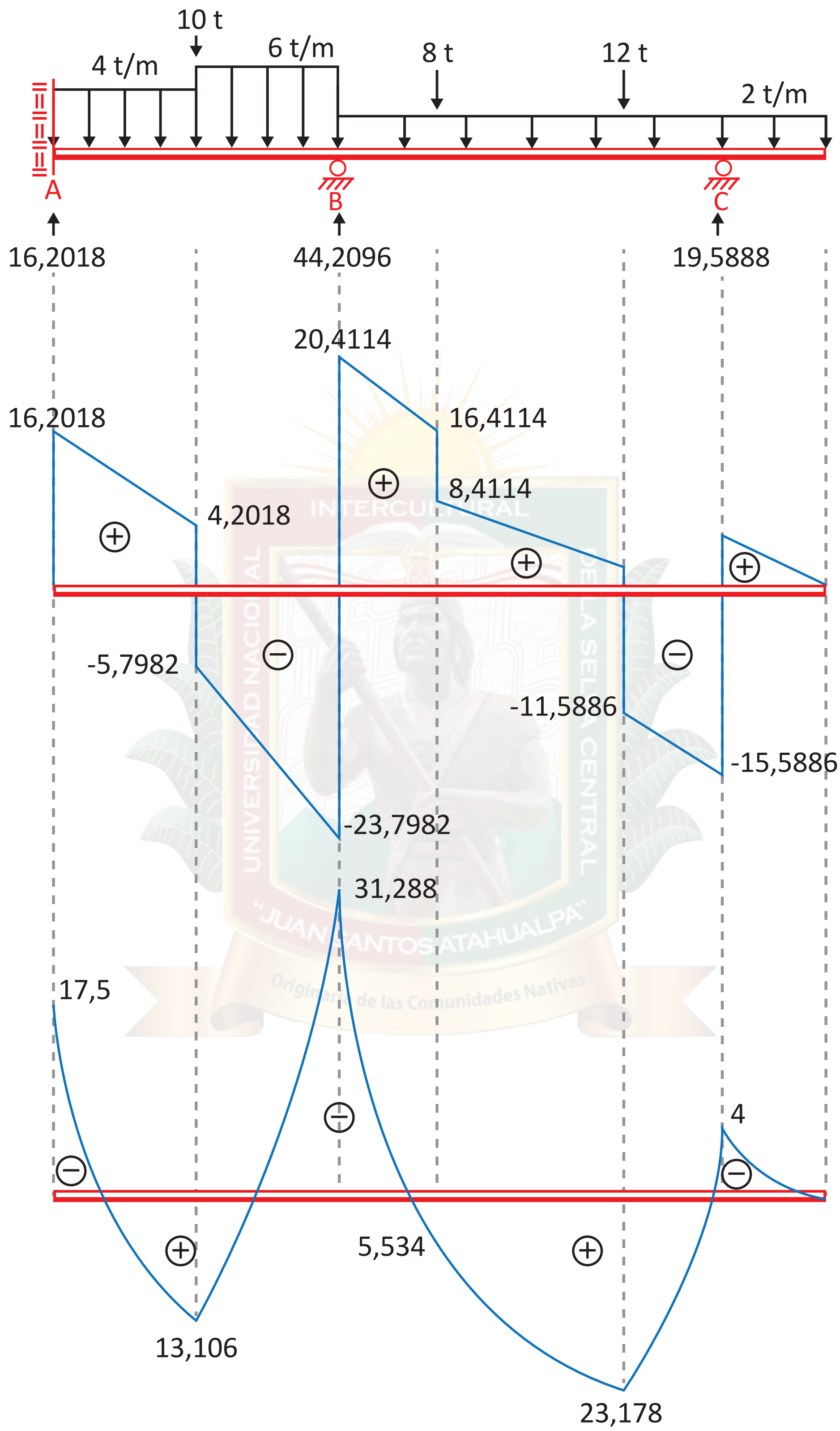
6		8		2	
-17,5	-31,29	-31,29	-4	4	0
-2,2983		3,41125		2	
18,5	-21,5	17	-19	4	0
16,2018	-23,7983	20,4113	-15,888	6	2

$$R_A = 16{,}2018\ t\ \uparrow$$

$$R_B = (23{,}7983 + 20{,}4113) = 44{,}2096\ t\ \uparrow$$

$$R_C = (15{,}5888 + 6) - 2 = 19{,}5888\ t\ \uparrow$$

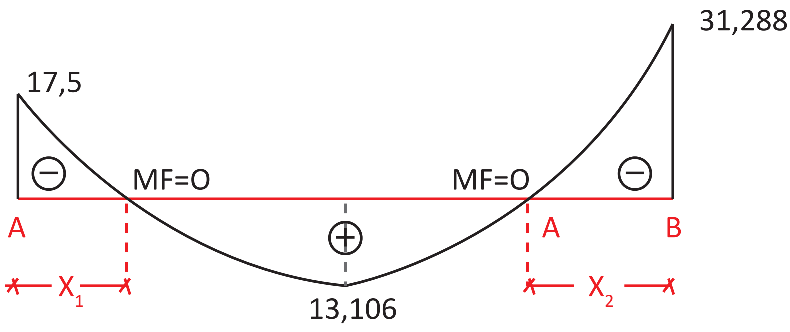
Grafica de los DFC Y DMF



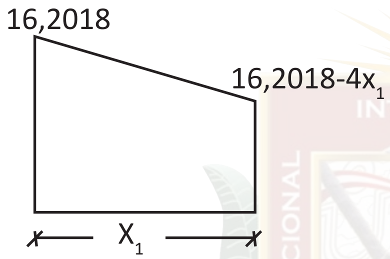
b. Acote la posición de los puntos de inflexión (MF =0) de los tramos AB Y BC.

SOLUCIÓN

Tramo AB acotado:



Calculando X_1:



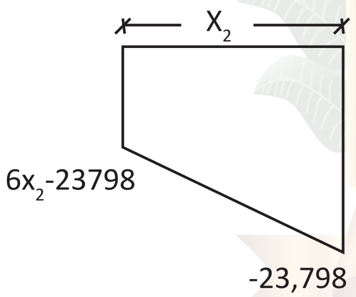
$$-17{,}5 + \left(\frac{32{,}404 - 4x_1}{2}\right) x_1 = 0$$

$$-35 + 32404x_1 - 4x_1^2 = 0$$

$$-4x_1^2 + 32{,}404\, x_1 - 35 = 0$$

$$\Rrightarrow X_1 = 1{,}2835\ m$$

Calculando X_2:



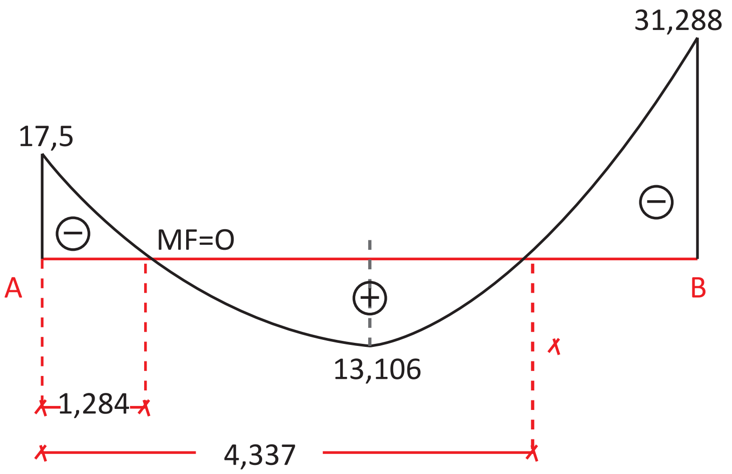
$$-31{,}288 - \left(\frac{-47{,}596 + 6x_2}{2}\right) x_2 = 0$$

$$-62{,}576 + 47{,}596x_2 - 6x_2^2 = 0$$

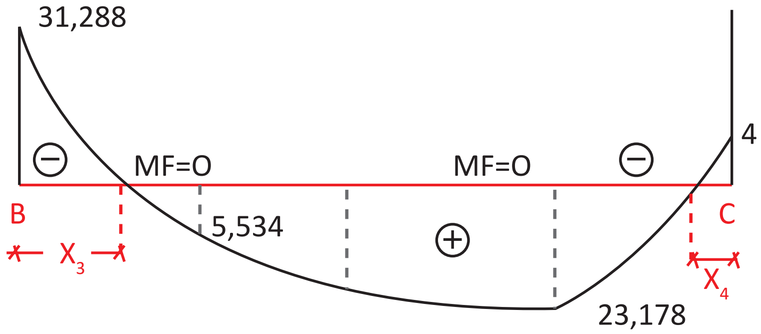
$$-6x_2^2 + 47{,}596x_2 - 62{,}576 = 0$$

$$\Rrightarrow X_2 = 1{,}663\ m$$

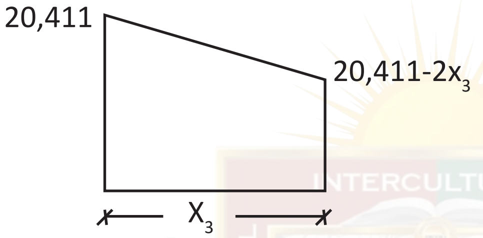
Tramo AB acotado:



Tramo BC:



Calculando X_3:

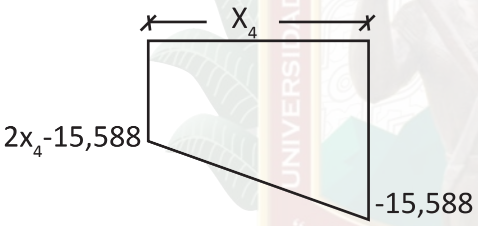


$$-31,88 + \left(\frac{40,822-2x_3}{2}\right)x_3 = 0$$

$$-2X_3 2 + 40,822\ X_3 - 62,576 = 0$$

$$\Rrightarrow X_3 = 1,669\ \text{m.}$$

Calculando X_4:

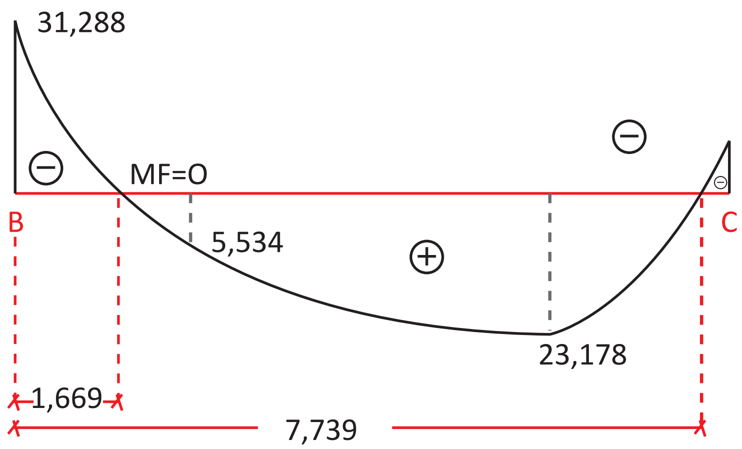


$$-4\ -\left(\frac{-31,176 + 2\ x_4}{2}\right)x_4 = 0$$

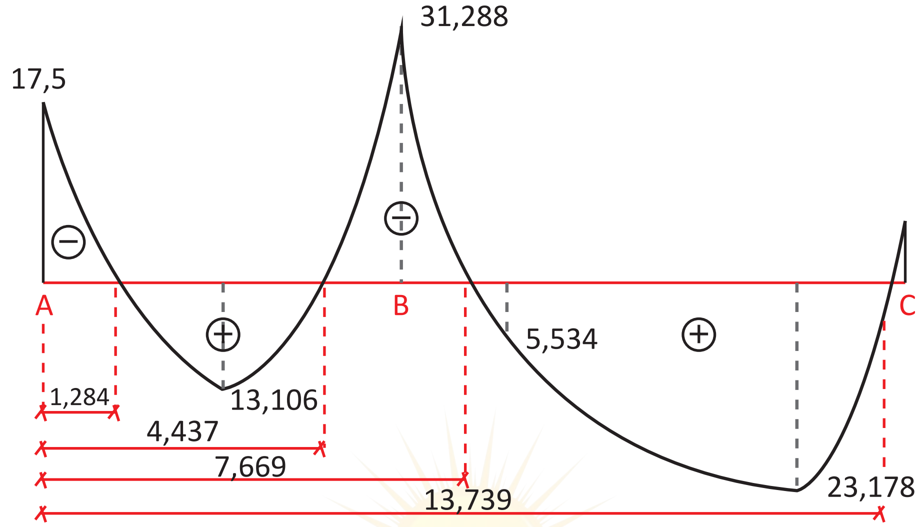
$$-2X_4 2 + 31,176\ X_4 - 8 = 0$$

$$\Rrightarrow X_4 = 0,261\ \text{m.}$$

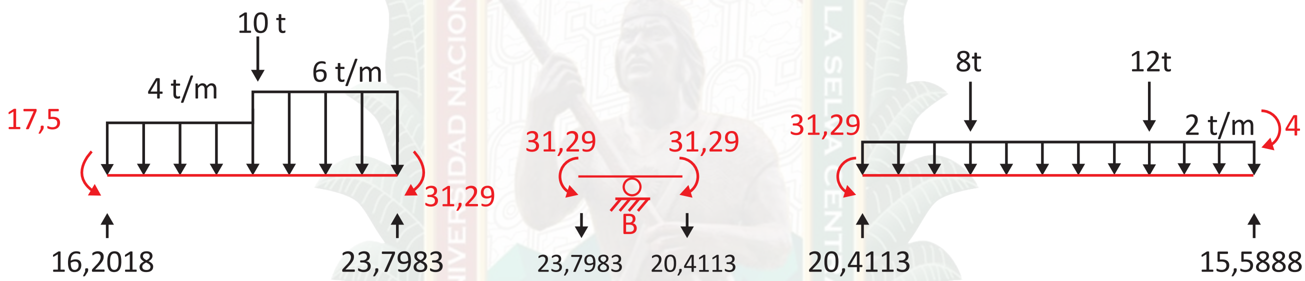
Tramo BC acotado:



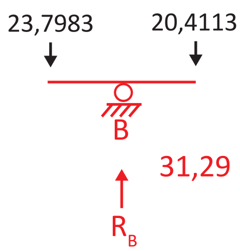
Finalmente tenemos:



c) Obtenga la reacción em B mediante DCL (concepto de equilibrio de barras) y el equilibrio del NODO B.



Analizando en NODO B. Para hallar las reacciones:



$$+\uparrow \sum Fy = 0 :$$

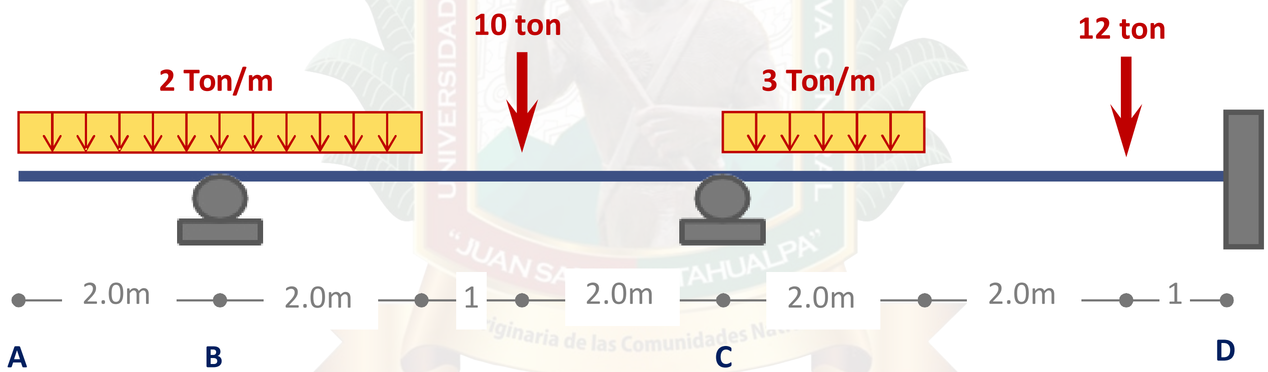
$$-23{,}7983 - 20{,}4113 + R_B = 0$$

$$\boxed{R_B = 44{,}2096 \text{ t.} \uparrow}$$

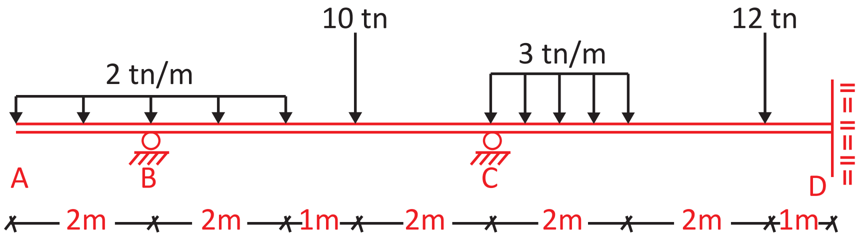
PREGUNTA N° 03:

a. La viga continua **ABCD** esta cometida a las cargas indicadas. El momento de empotramiento **D** es sentido horario, con el valor $M_G = 7.02\ t$ - m , y se sabe que el momento en **C** produce tracción en el lado superior y tiene el valor $M_C = 8.77$ t - m.

b. a) Dibuje los diagramas de fuerzas cortantes y momen-tos flectores. (Método a utilizar a criterio del estudiante).



EJERCICIO #03:



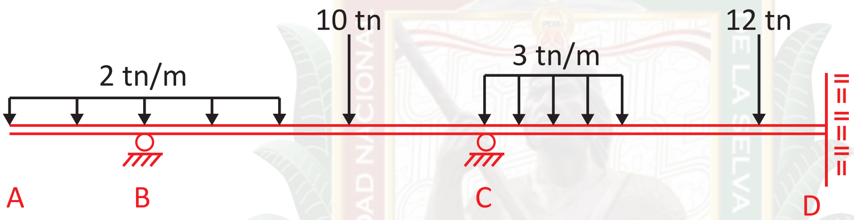
4

$M_D =$ 7,02 t-m

$M_c =$ 8,77 t-m (como dice tracción en lado superior entonces es negativo)

SOLUCIÓN

Método de Reacciones a partir de Fuerzas Cortantes



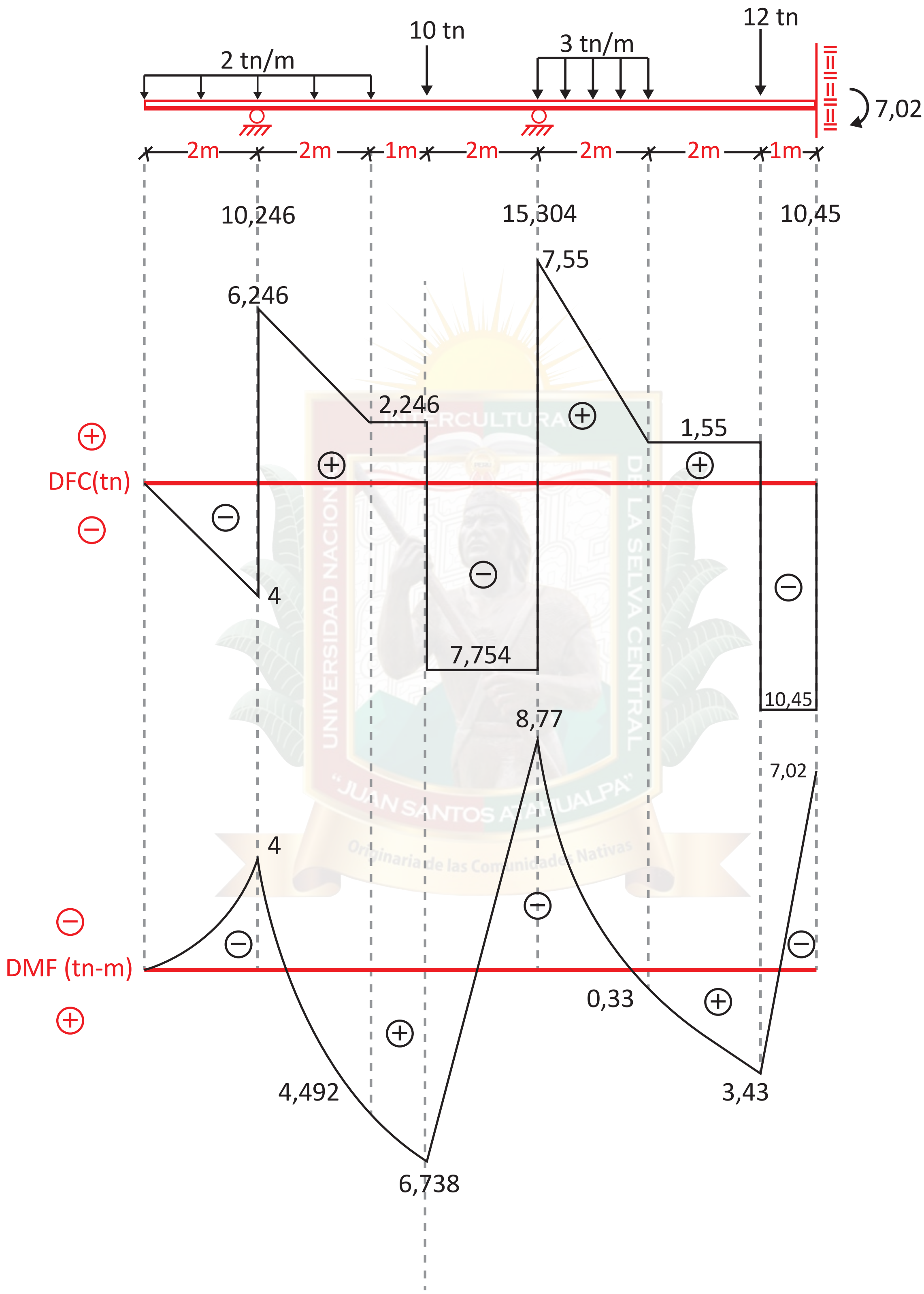
6		5		5		Luz c/ tramo
0	4	-4	-8,77	-8,77	-7,02	Momento. c/ apoyo
2		-0,954		0,35		Corrección momento.
0	4	7,2	-6,8	7,2	-10,8	F.C. Isostática
2	6	6,246	-7,754	7,55	-10,45	F.C. Final

$$R_B = (6 + 6{,}246) - 2 = \boxed{10{,}246\ ton}$$

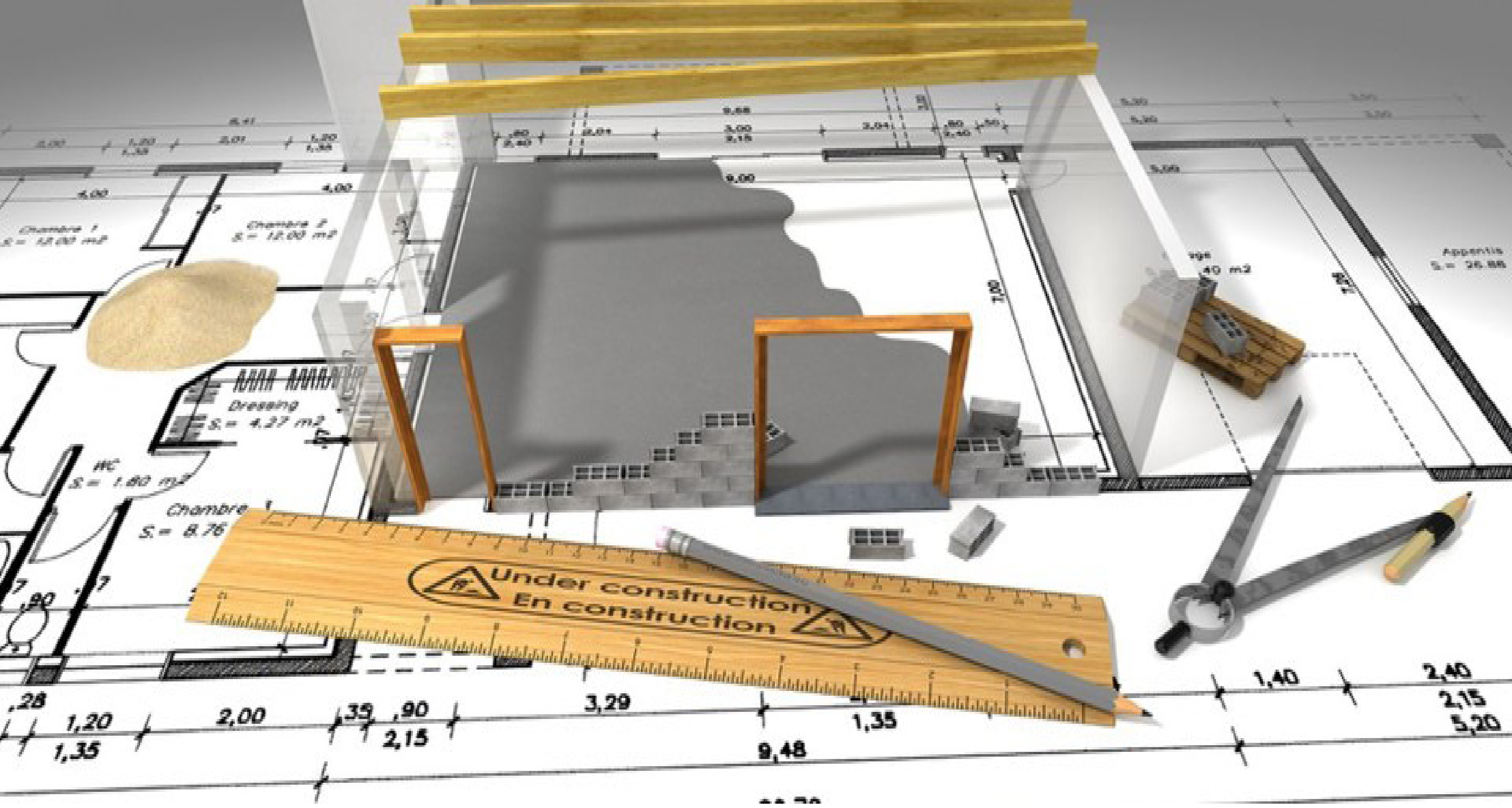
$$R_c = (7{,}754 + 7{,}55) = \boxed{15{,}304\ ton}$$

$$R_D = \boxed{10{,}45\ tm}$$

Graficando los DFC. DMF.




«Vive como si fueras a morir mañana; aprende como si el mundo fuera a durar para siempre».
- Mahatma Gandhi



EJEMPLOS Y EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

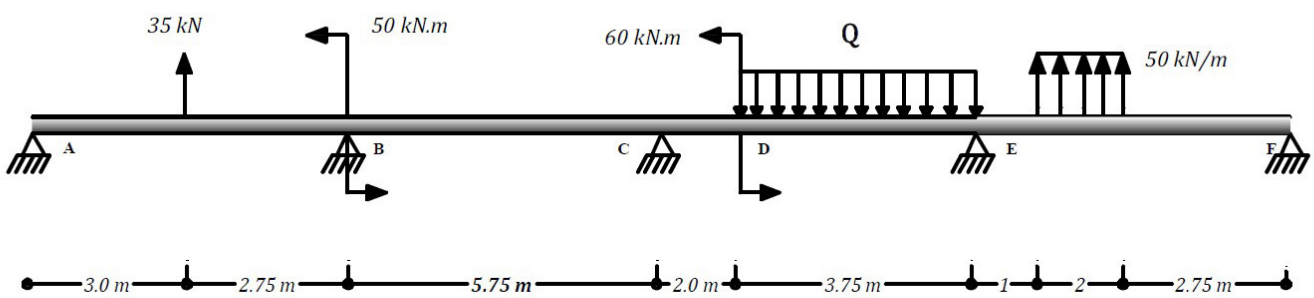
TEMA 02

TEMA 02

Se realiza la solución de ejercicios propuestos en prácticas calificadas y exámenes, paso a paso correspondiente al tema 02: Distribución de Momentos, aplicados estructuras hiperestáticas: vigas y pórticos.

PROBLEMA N° 01:

Utilizando el método Cross Simplificado, calcular los momentos finales en los apoyos, la reacción en "E", y el mo-mento en el centro de luz del tramo EF utilizando el méto-do de la sección, desarrolle el ejercicio colocando el desarrollo completo del problema de manera ordenada y sus respuestas en recuadros. Realizar 6 iteraciones.



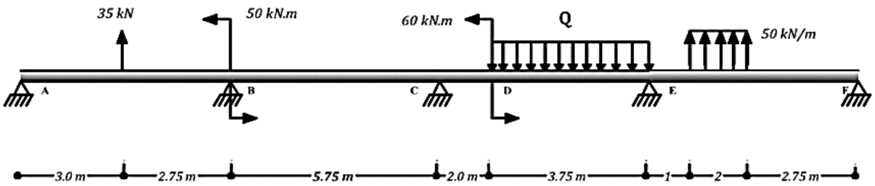
Fila A: Q = 35000 N/m

Fila B: Q = 45000 N/m

Fila C: Q = 65000 N/m

EJERCICIO #01:

Utilizando el método Cross Simplificado, calcular los momentos finales en los apoyos, la reac-ción en “E", y el momento en el centro de luz del tramo EF utilizando el método de la sección, desarrolle el ejercicio colocando el desarrollo completo del problema de manera ordenada y sus respuestas en recuadros. Realizar 6 iteraciones,



FILA A = 35000 N/m

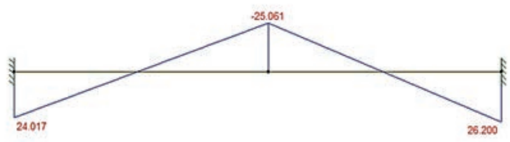
Q= 35 kN/m

	AB	BC	CE	EF
I	1.00	1.00	1.00	1.00
L	5.75	5.75	5.75	5.75
Krel	0.130	0.174	0.174	0.130

A: 0 | B: 50 | C: 0 | E: 0 | F: 0

Ui	1	0.4286	0.5714	0.5	0.5	0.5714	0.4286	1
MEP	24.017	-26.200	0.000	0.000	-56.363	64.473	79.521	-45.117
	-24.017	-12.009					22.559	45.117
DISTR.		-5.054	-6.738	28.182	28.182	-95.173	-71.380	
TRANS.			14.091	-3.369	-47.586	14.091		
DISTR.		-6.039	-8.052	25.478	25.478	-8.052	-6.039	
TRANS.			12.739	-4.026	-4.026	12.739		
DISTR.		-5.460	-7.279	4.026	4.026	-7.279	-5.460	
TRANS.			2.013	-3.640	-3.640	2.013		
DISTR.		-0.863	-1.150	3.640	3.640	-1.150	-0.863	
TRANS.			1.820	-0.575	-0.575	1.820		
DISTR.		-0.780	-1.040	0.575	0.575	-1.040	-0.780	
TRANS.			0.288	-0.520	-0.520	0.288		
DISTR.		-0.123	-0.164	0.520	0.520	-0.164	-0.123	
TRANS.			0.260	-0.082	-0.082	0.260		
DISTR.		-0.111	-0.149	0.082	0.082	-0.149	-0.111	
M.F. METODO SIMPLIFICADO	0.000	-56.638	6.638	50.290	-50.290	-17.324	17.324	0.000

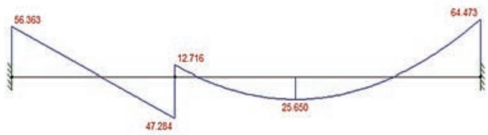
MEP - TRAMO AB :



Mab= 24.017

Mba= -26.2

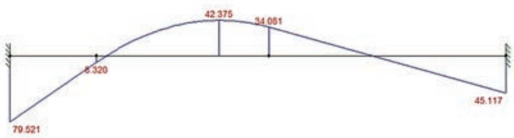
MEP - TRAMO CE :



Mce= -56.36

Mec= 64.473

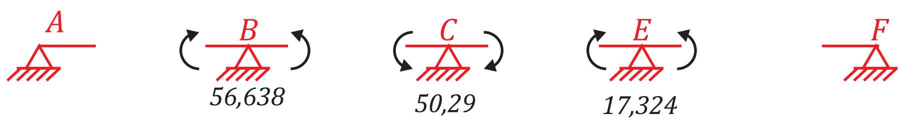
MEP - TRAMO EF :



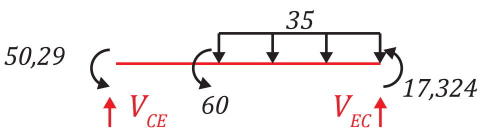
Mef= 79.521

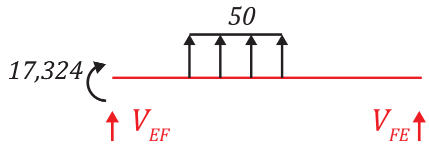
Mfe= -45.12

(a) Calculando los momentos finales en los apoyos



(b) Calculando los Reaciones en E.





$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0:$

$50{,}29 + 17{,}324 + 60 - 35\,(3{,}75)\,(3{,}875) + 5{,}75\,V_{EC} = 0$

$V_{EC} = 66{,}2565$

$+\uparrow \Sigma M_{FY} = 0:$

$V_{CE} = -35(3{,}75) + 66{,}2565 = 0$

$V_{CE} = 64{,}9935$

$+\circlearrowleft \Sigma M_F = 0:$

$-17{,}324 - 50(2)(3{,}75) - 5{,}75\,V_{EF} = 0$

$V_{EF} = -68{,}2303$

$+\uparrow \Sigma F_Y = 0:$

$-68{,}2303 + 100 + V_{EF} = 0$

$V_{FE} = -31{,}7697$

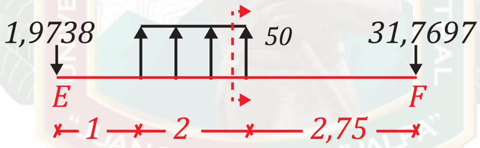
∴ La reacción en E = $V_{EC} + V_{EF}$

$Ey = V_{EC} + V_{EF}$

$Ey = 66{,}2565 - 68{,}2303$

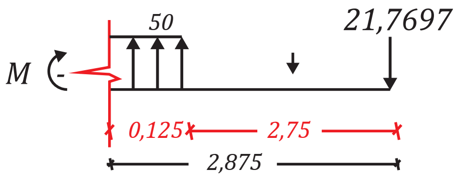
$\boxed{Ey = -1{,}9738\ KN \downarrow}$

(c) Calculando el momento en el Centro de luz del tramo EF



Como nos dice en el centro realizamos un corte en el centro del tramo:

$5{,}75 / 2 = 2{,}875\ m$



$\Sigma F_0 = 0:$

$-M + 50\,(0{,}125)(0{,}0625) - 31{,}7697(2{,}875) = 0$

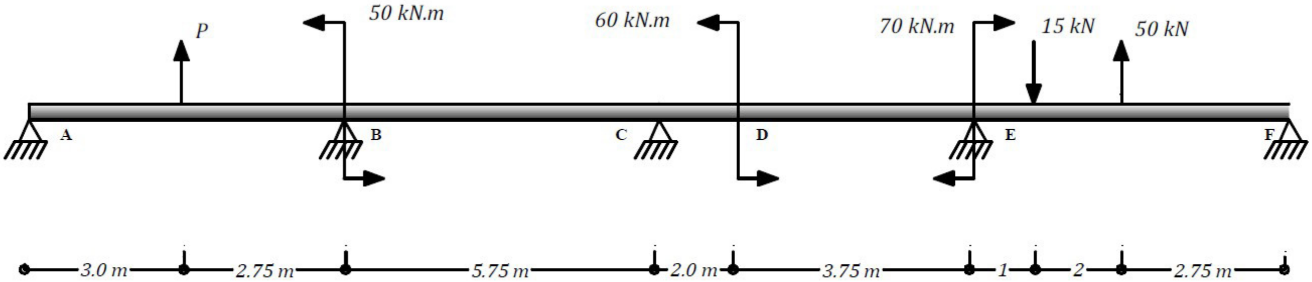
$M = -90{,}9473\ KN\text{-}m$

∴ El momento en el centro de luz del tramo EF sera:

$\boxed{M = -90{,}9473\ KN\text{-}m}$

PROBLEMA N° 02:

Utilizando el método Cross el nudo más desbalanceado, calcu-lar los momentos finales en los apoyos, la reacción en "C", y el momento en el centro de luz del tramo AB utilizando el método de la sección, desarrolle el ejercicio colocando el desarrollo completo del problema de manera ordenada y sus respuestas en recuadros. Realizar 6 iteraciones.



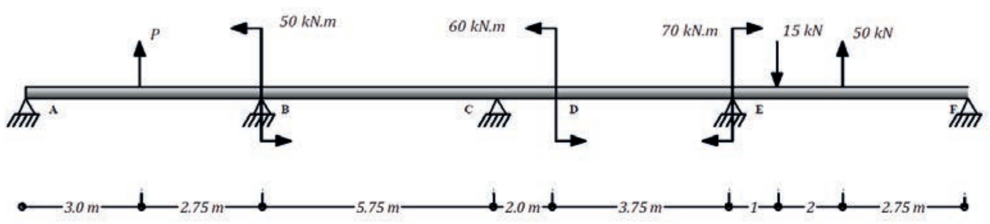
Fila A: P = 15000 N

Fila B: P = 25000 N

Fila C: P = 35000 N

EJERCICIO #02:

Utilizando el método Cross el nudo más desbalanceado, calcular los momentos finales en los apoyos, la reacción en “C”, y el momento en el centro de luz del tramo AB utilizando el método de la sección, desarrolle el ejercicio colocando el desarrollo completo del problema de manera ordenada y sus respuestas en recuadros. Realizar 6 iteraciones.



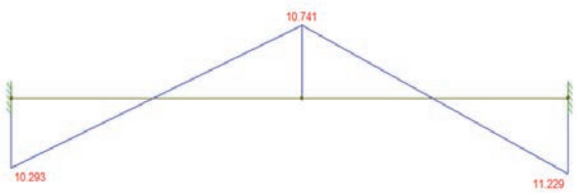
FILA A = 15000 N

P= 15 kN

	I = 1.00		I = 1.00		I = 1.00		I = 1.00	
	L = 5.75		L = 5.75		L = 5.75		L = 5.75	
A	Krel = 0.130	B	Krel = 0.174	C	Krel = 0.174	E	Krel = 0.130	F
0		50		0		-70		0

Ui	1	0.4286	0.5714	0.5	0.5	0.5714	0.4286	1
MEP	10.293	-11.229	0.000	0.000	-1.701	-19.962	24.074	-35.274
	-10.293	-5.147					17.637	35.274
DISTR.						27.572	20.679	
TRANS.					13.786			
DISTR.				-6.043	-6.043			
TRANS.			-3.021			-3.021		
DISTR.		-13.116	-17.488			1.726	1.295	
TRANS.				-8.744	0.863			
DISTR.				3.940	3.940			
TRANS.			1.970			1.970		
DISTR.		-0.844	-1.126			-1.126	-0.844	
TRANS.				-0.563	-0.563			
DISTR.				0.563	0.563			
TRANS.			0.281			0.281		
DISTR.		-0.121	-0.161			-0.161	-0.121	
M.F. METODO DNMD	0.000	-30.456	-19.544	-10.846	10.846	7.280	62.720	0.000
		-50.000				70.000		

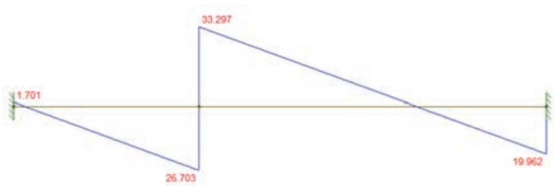
MEP - TRAMO AB :



Mab= 10.293

Mba= -11.23

MEP - TRAMO CE :



Mce= -1.701

Mec= -19.96

MEP - TRAMO EF :

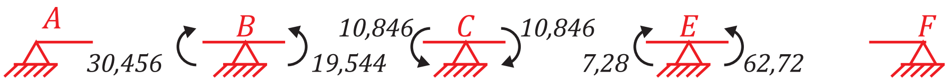
Mef= 24.074

Mfe= -35.27

METODOS DEL NUDO MAS DESBALANCEADO

EJERCICIO #02:

ⓐ Calculando los momentos finales en los apoyos



ⓐ Calculando las reacciones en C

$\sum M_B = 0:$

$19,544 + 10,846 + 5,75\, V_{CB} = 0$

$VCB = -5,2852 \downarrow$

$\sum M_Y = 0:$

$V_{BC} = 5,2852 \uparrow$

$\sum M_C = 0:$

$-10,846 + 60 - 7,28 + 5,75\, V_{EC} = 0$

$V_{EC} = -7,2824 \downarrow$

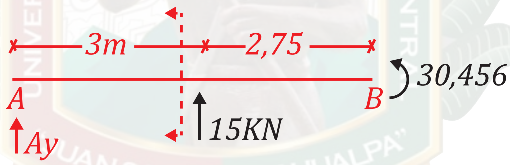
$E_{FY} = 0:$

$V_{CE} = -7,2824 \uparrow$

∴ La reacción en C = $V_{CB} + V_{CE}$

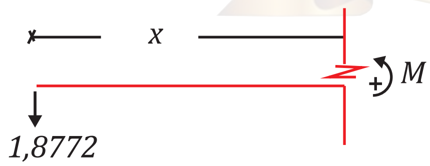
$C = -5,2852 + 7,2824 \Rightarrow$ $\boxed{Cy = 1,9972\ KN \downarrow}$

ⓒ Calculando el momento en el centro de luz del tramo AB



$M_B = 0: \quad - Ay(5,75) - 15(2,75) + 30,456 = 0$

$Ay = -1,8772$



$\sum M_0 = 0:$

$M = -1,8772\,(x)$

Como la mitad es: 2,875:

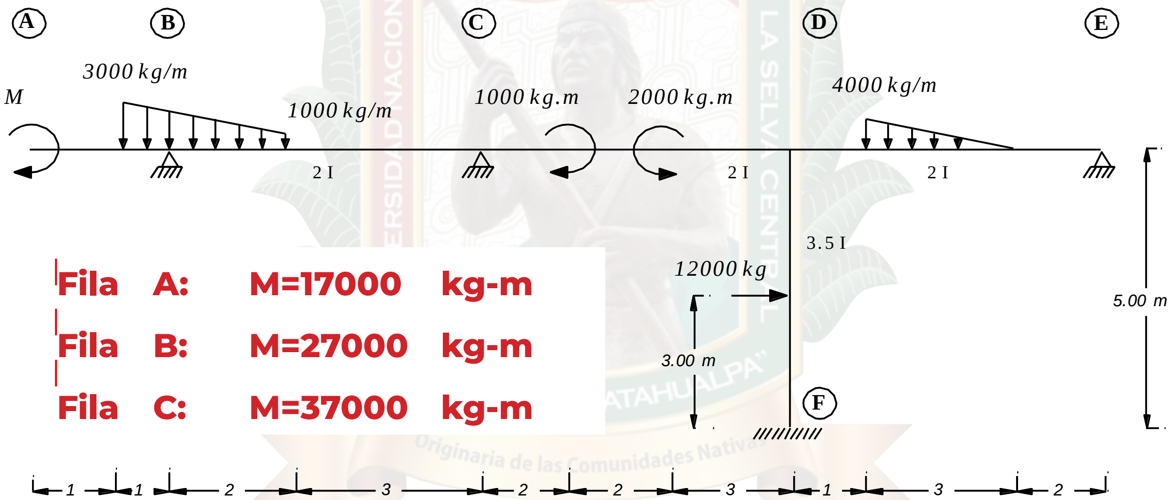
$M\,(2,875) = -1,8772(2,875) = -5,397$

∴ El momento en el centro de luz del tramo AB sera:

$\boxed{M = -5,397\ KN\text{-}m}$

PROBLEMA N° 03:

Utilizando el método Cross simplificado, calcular los momentos finales en los apoyos, y el diagrama de momento en “DE” utilizando el método de la sección, desarrolle el ejercicio colocando el desarrollo completo del problema de manera ordenada y sus respuestas en recuadros. Realizar 6 iteraciones. Considerar “M” igual a 1500 kg-m.



Fila A: M=17000 kg-m

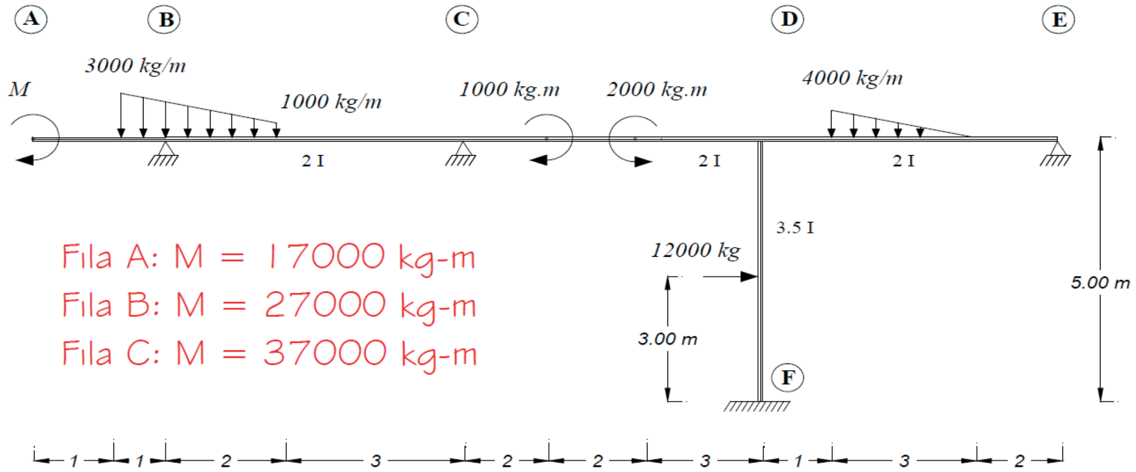
Fila B: M=27000 kg-m

Fila C: M=37000 kg-m

METODO DIRECTO O SIMPLIFICADO

EJERCICIO #03:

Utilizando el método Cross simplificado, calcular los momentos finales en los apoyos, y el diagrama de momento en “DE” utilizando el método de la sección, desarrolle el ejercicio colocando el desarrollo completo del problema de manera ordenada y sus respuestas en recuadros. Realizar 6 iteraciones. Considerar “M” igual a I 500 kg-m.



Fila A: M = 17000 kg-m
Fila B: M = 27000 kg-m
Fila C: M = 37000 kg-m

FILA A = 17000 kg-m

M= 17000 kg-m

	B	C	D	E	F
I	I = 2.00	I = 2.00		I = 2.00	I = 3.50
L	L = 5	L = 7		L = 6	L = 5
Krel	Krel=0.300	Krel=0.286		Krel=0.250	Krel=0.700

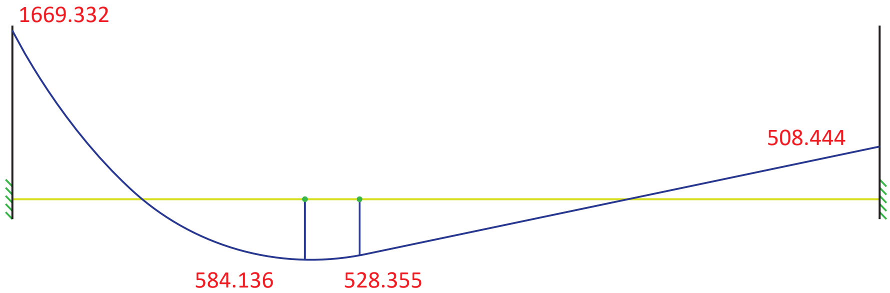
17000

-15611.1

NODOS	B	C		D			E	F
TRAMOS	BC	CB	CD	DC	DE	DF	ED	FD
Ui	1	0.512195	0.487805	0.231214	0.202312	0.566474	1	0
MEP	-1669.332	508.444	-714.286	0.000	-4866.667	8640.000	2633.333	-5760.000
	17280.443	8640.222			-1316.667		-2633.333	
DISTR.		-4320.048	-4114.331	-568.015	-497.013	-1391.638		0.000
TRANS.			-284.008	-2057.166				-695.819
DISTR.		145.467	138.540	475.645	416.190	1165.331		0.000
TRANS.			237.823	69.270				582.665
DISTR.		-121.812	-116.011	-16.016	-14.014	-39.240		0.000
TRANS.			-8.008	-58.006				-19.620
DISTR.		4.102	3.906	13.412	11.735	32.859		0.000
TRANS.			6.706	1.953				16.429
DISTR.		-3.435	-3.271	-0.452	-0.395	-1.106		0.000
TRANS.			-0.226	-1.636				-0.553
DISTR.		0.116	0.110	0.378	0.331	0.927		0.000
TRANS.			0.189	0.055				0.463
DISTR.		-0.097	-0.092	-0.013	-0.011	-0.031		0.000
M.F. METODO SIMPLIFICADO	15611.111	4852.959	-4852.959	-2140.589	-6266.512	8407.101	0.000	-5876.434

MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO POR TRAMOS

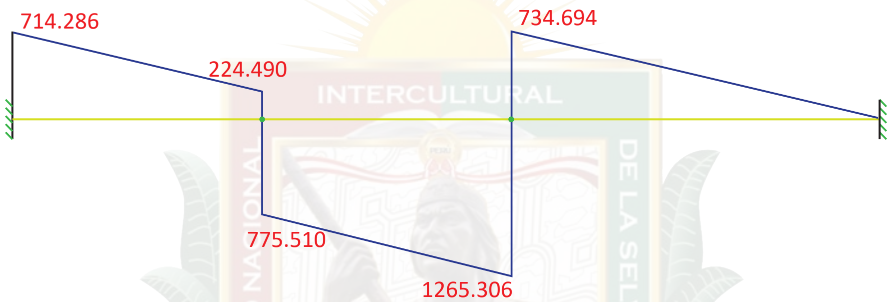
MEP: TRAMO BC



Mbc = - 1669.332

Mbc = 508.444

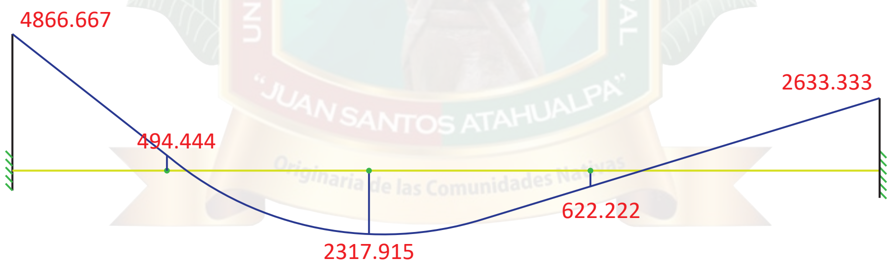
MEP: TRAMO CD



Mbc = - 714.286

Mbc = 0

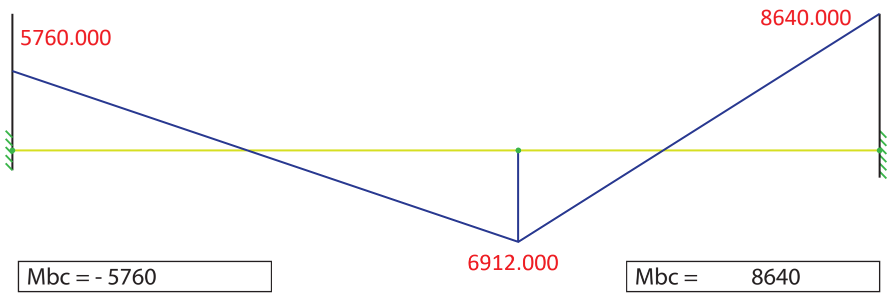
MEP: TRAMO DE



Mbc = - 4866.667

Mbc = 2633.333

MEP: TRAMO FD



Mbc = - 5760

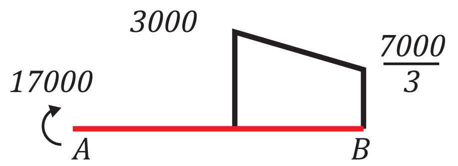
Mbc = 8640

Mbc = - 5760

Mbc = 8640

ⓐ Momentos finales en los apoyos:

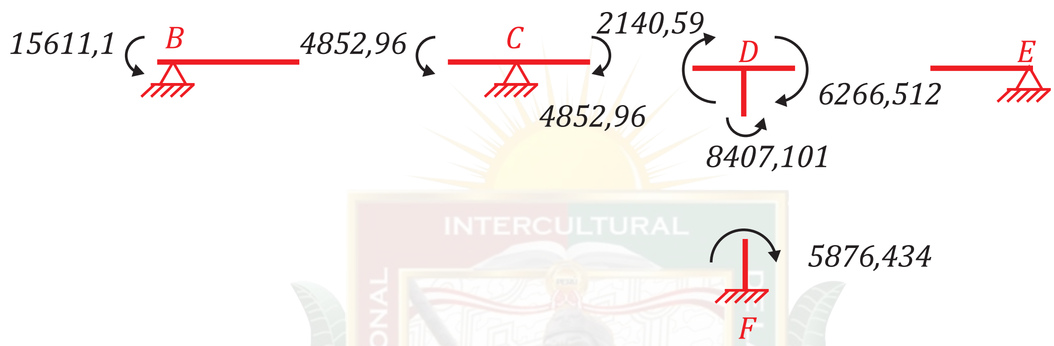
Analizando el voladizo - ISOESTÁTICO:



$$\sum M_B = 0$$

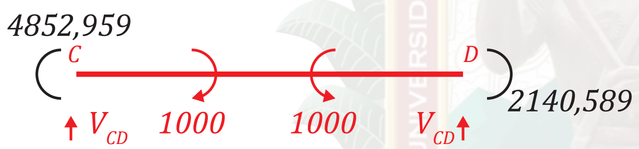
$$17000 - M - \frac{1000}{3}\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{7000}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

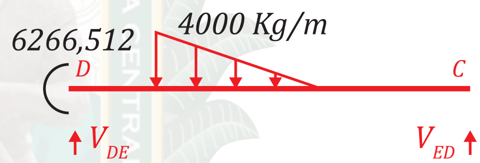
$$M_{VOL} = 15G11{,}11\ Kg.\ m$$



ⓑ Graficar el DMF en el tramo DE

Calculamos las reacciones en D y E





$$\sum M_C = 0$$

$$4852{,}159 - 1000 + 2000 + 2140{,}589 + 7\ V_{DC} = 0$$

$$V_{DC} = -1141{,}9354$$

$$\sum Fy = 0:$$

$$V_{CD} = 1141{,}9354$$

$$\sum M_0 = 0:$$

$$6266{,}512 - 6000\ (2) + 6\ V_{ED} = 0$$

$$V_{ED} = 955{,}5813$$

$$\sum M_y = 0:$$

$$V_{DE} = -6000 + 955{,}5813 = 0$$

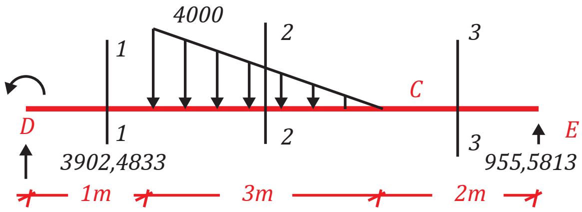
$$V_{DE} = 5044{,}4187$$

$\therefore$ $Ey = 955{,}5813\ Kg$ ↑

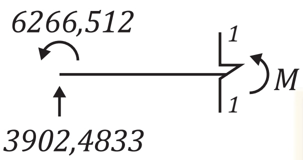
$Dy = -1141{,}9354 + 5044{,}4187$

$Dy = 3902{,}4833\ Kg$ ↑

* Determinando las EC. de Momento:



CORTE 1-1: $0 \leq x \leq 1$



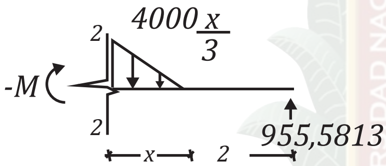
$$\Sigma M_0 = 0: \quad -3902{,}4833\,x + 6266{,}592 + M = 0$$

$$M = 3902{,}4833\,x - 6266{,}592$$

$x = 0 \rightarrow M = -6266{,}592$ Kg-m

$x = 1 \rightarrow M = -2364{,}1087$ Kg-m

CORTE 2-2: $3 \geq x \geq 0$



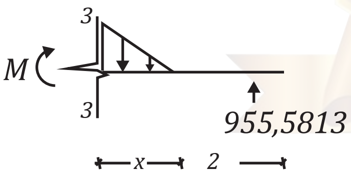
$$\Sigma M_0 = 0: \quad -M - 4000\left(\frac{x^2}{6}\right)\left(\frac{x}{3}\right) + 955{,}5813\,(x+2)$$

$$M = -\frac{2000}{4}x^3 + 955{,}5813\,(x+2) = 0$$

$x = 0 \rightarrow M = 1911{,}1626$ Kg - m

$x = 3 \rightarrow M = -1222{,}0935$ kg - m

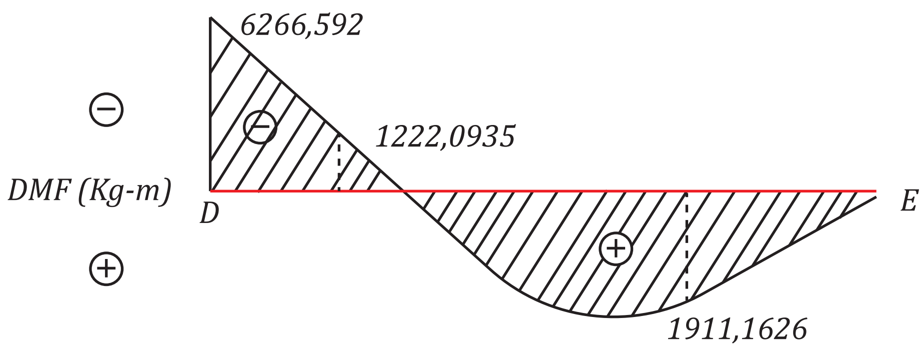
CORTE 3-3: $2 \geq x \geq 0$



$$\Sigma M_0 = 0: \quad M = 955{,}5813\,x$$

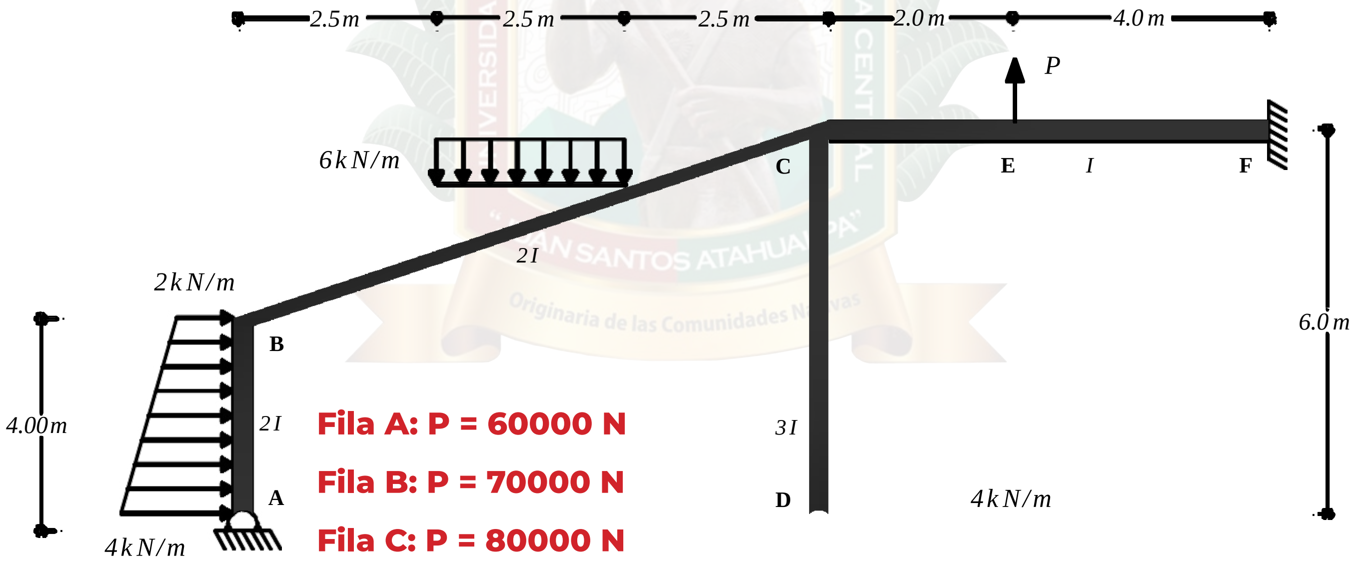
$x = 0 \rightarrow M = 0$

$x = 2 \rightarrow M = 1911{,}1626$ Kg - m



PROBLEMA N° 04:

Utilizando el método Cross simplificado, calcular los momentos finales en los apoyos, y el diagrama de momento en "CE" utilizando el método de la sección, desarrolle el ejercicio colocando el desarrollo completo del problema de manera ordenada y sus respuestas en recuadros. Realizar 6 iteraciones.



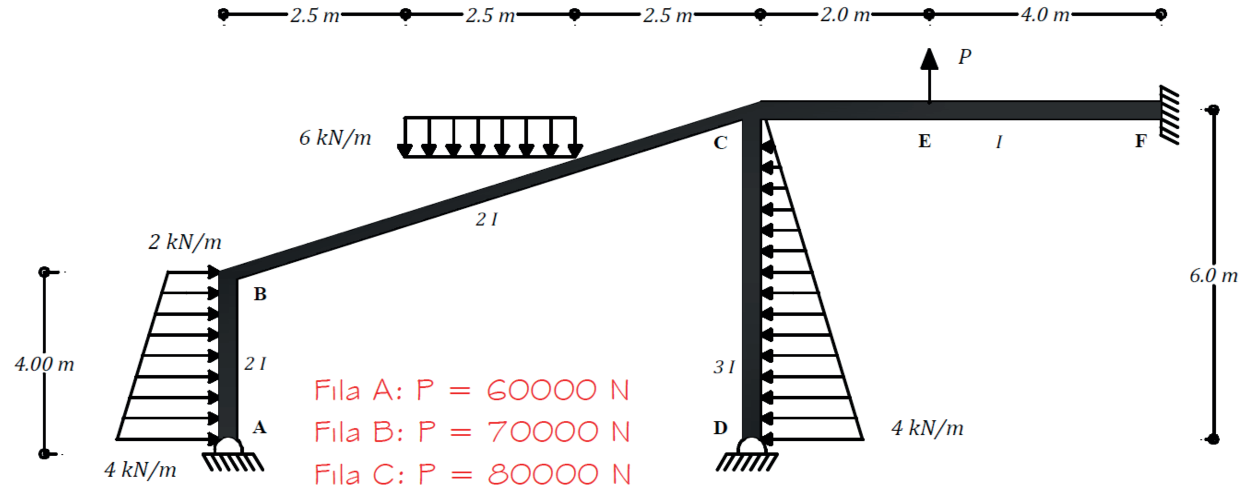
Fila A: P = 60000 N

Fila B: P = 70000 N

Fila C: P = 80000 N

EJERCICIO #04:

Utilizando el método Cross simplificado, calcular los momentos finales en los apoyos, y el diagrama de momento en "CE" utilizando el método de la sección, desarrolle el ejercicio colocando el desarrollo completo del problema de manera ordenada y sus respuestas en recuadros. Realizar 6 iteraciones.



FILA A = 60000 N

M= 60 Kn

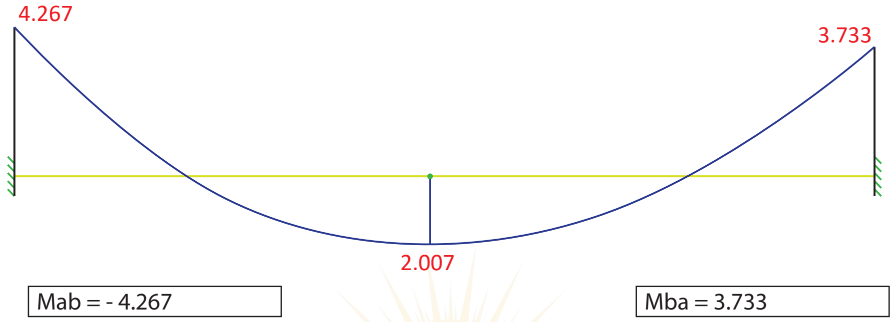
Iab = 2.00	Ibc = 2.00	Icd = 3.00	Icf = 1.00
Lab = 4.00	Lbc = 7.76	Lcd = 6.00	Lcf = 6.00
Krel = 0.38	Krel = 0.26	Krel = 0.38	Krel = 0.17

NODOS	A	B		C			D	F
TRAMOS	AB	BA	BC	CB	CD	CF	DC	FC
Ui	1	0.592733	0.407267	0.322349	0.469143	0.208508	1	0
MEP	-4.267	3.733	-13.569	13.569	-4.800	53.333	7.200	-26.667
	4.267	2.134			-3.600		-7.200	
DISTR.		4.566	3.137	-18.858	-27.446	-12.198		0.000
TRANS.			-9.429	1.569				-6.099
DISTR.		5.589	3.840	-0.506	-0.736	-0.327		0.000
TRANS.			-0.253	1.920				-0.164
DISTR.		0.150	0.103	-0.619	-0.901	-0.400		0.000
TRANS.			-0.309	0.051				-0.200
DISTR.		0.183	0.126	-0.017	-0.024	-0.011		0.000
TRANS.			-0.008	0.063				-0.005
DISTR.		0.005	0.003	-0.020	-0.030	-0.013		0.000
TRANS.			-0.010	0.002				-0.007
DISTR.		0.006	0.004	-0.001	-0.001	0.000		0.000
TRANS.			0.000	0.002				0.000
DISTR.		0.000	0.000	-0.001	-0.001	0.000		0.000
M.F. METODO SIMPLIFICADO	0.000	16.366	-16.366	-2.845	-37.538	40.383	0.000	-33.142

METODO DIRECTO O SIMPLIFICADO

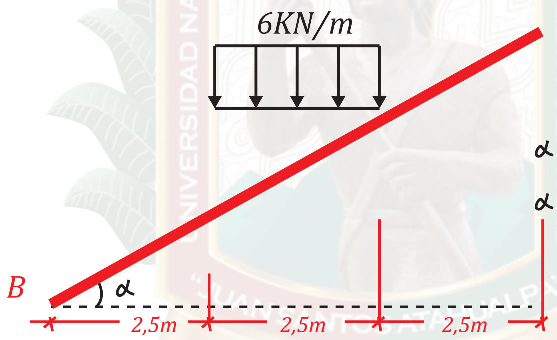
MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO POR TRAMOS

MEP: TRAMO AB



MEP: TRAMO BC

Para hallar el momento de empotramiento en el tramo BC analizaremos las cargas para luego hallar sus valores:

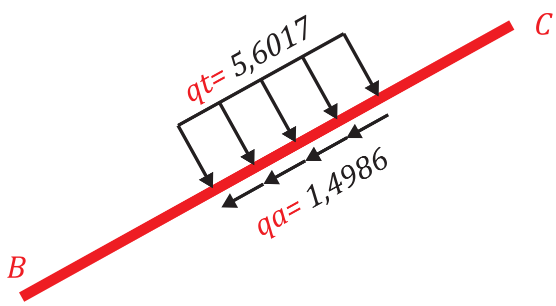


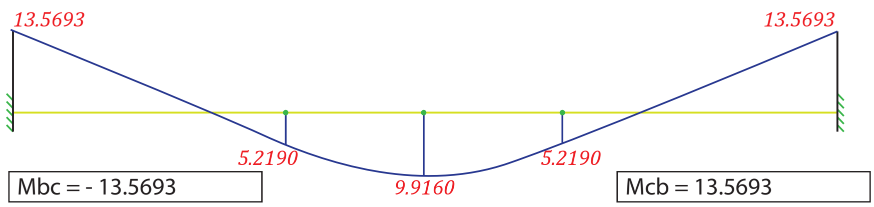
$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{2}{7,5}\right)$$

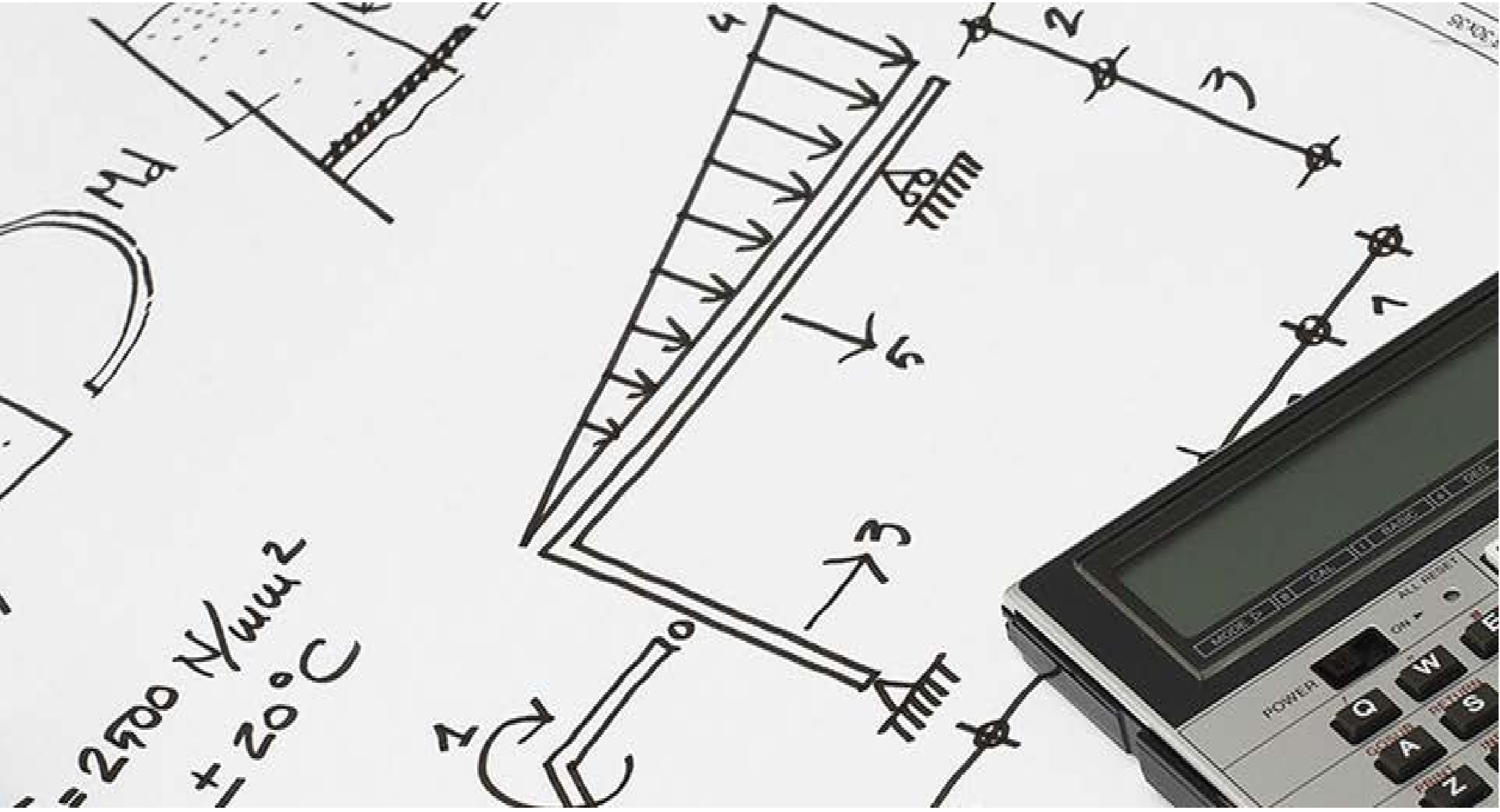
$$\alpha = 14,93$$

$$qt = 6\cos^2\alpha \Rightarrow qt = 5,6017.KN/m.$$

$$qa = 6\,sen.\cos\alpha \Rightarrow qa = 1,4936.KN/m$$





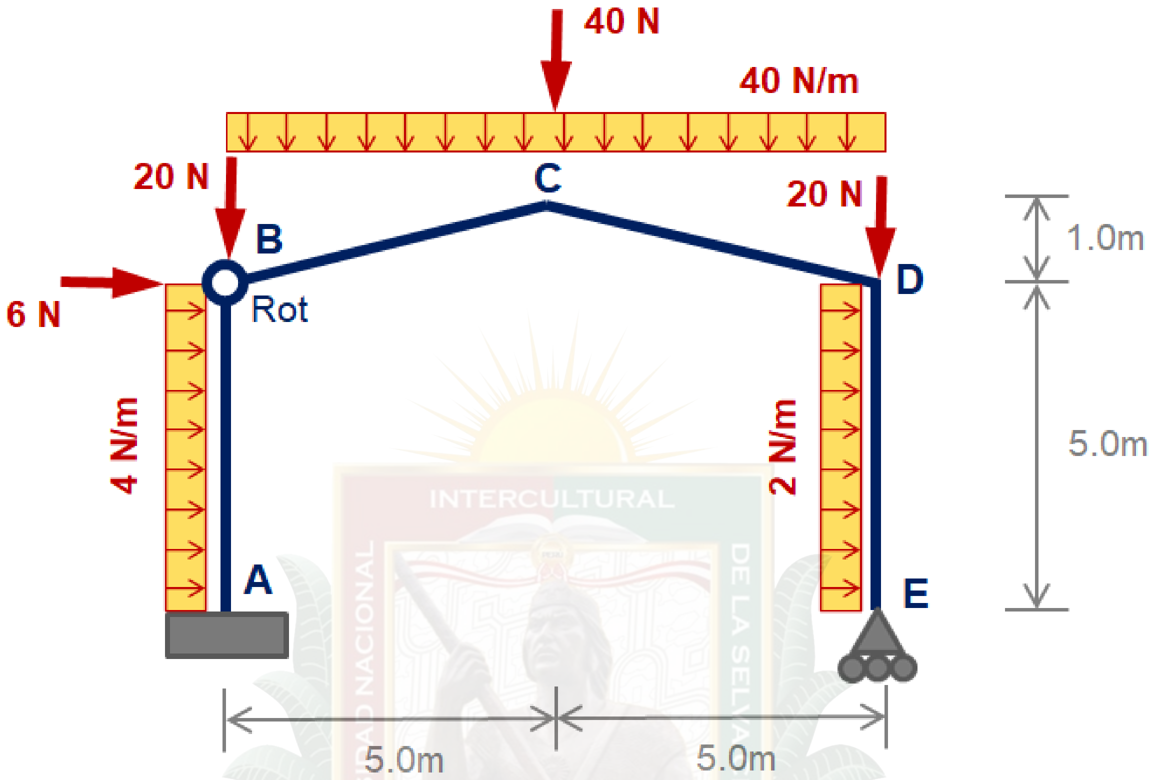


PROBLEMAS PROPUESTOS

TEMA 01

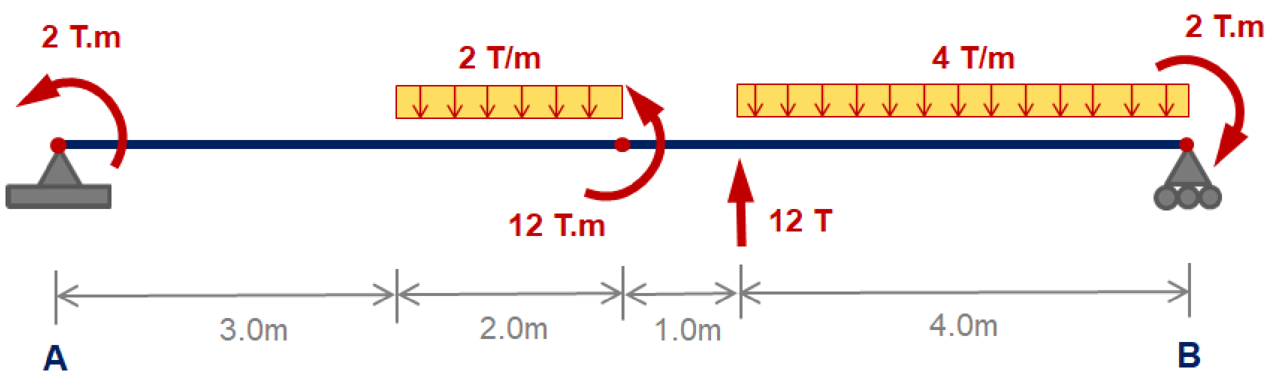
PROBLEMA #01:

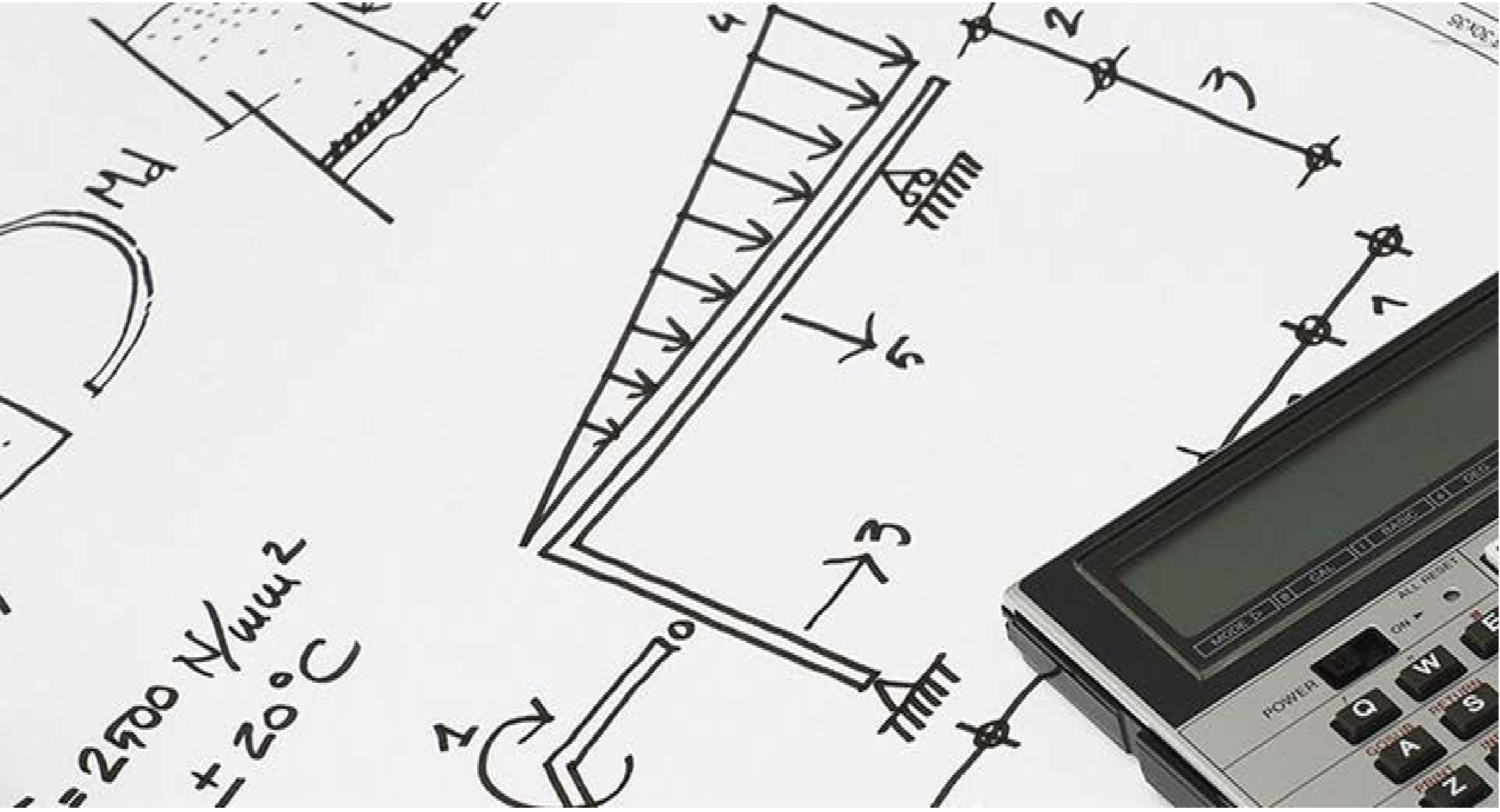
Para el pórtico que se muestra calcular el grado de hiperestaticidad y las reacciones en los apoyos A y E.



PROBLEMA #02:

Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector en la viga mostrada.



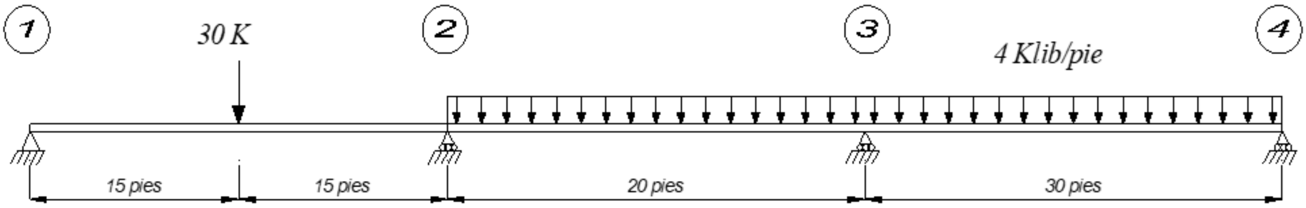


PROBLEMAS PROPUESTOS

TEMA 02

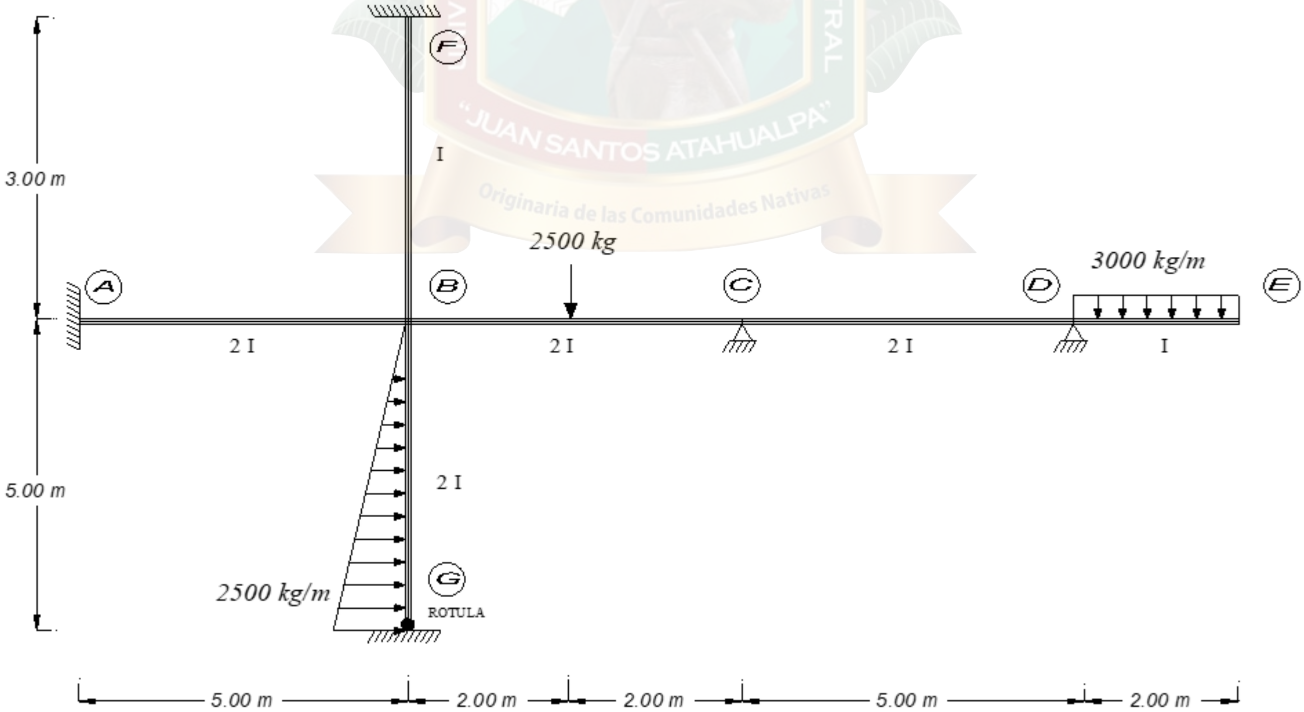
PROBLEMA #01:

Construir el diagrama de momento flector (DMF) para la viga mostrada, considerar el modulo de la elasticidad y el momento de inercia constante:



PROBLEMA #02:

Construir el diagrama de momento flector (DMF) para el pórtico mostrado, considerar el modulo de la elasticidad y el momento de inercia constante:

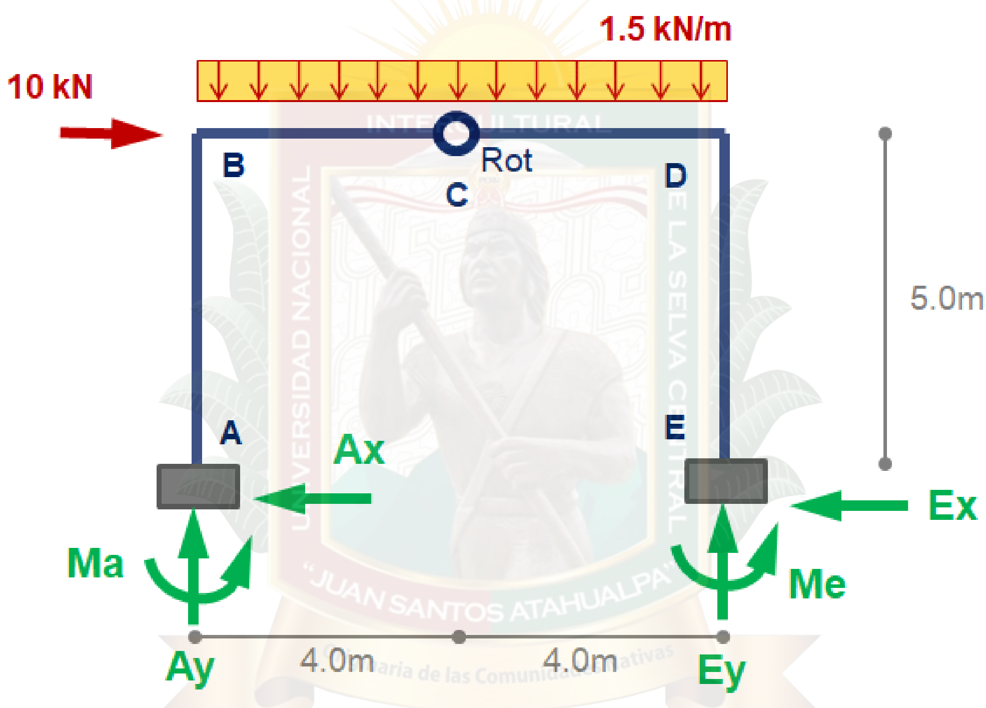


EVALUACIÓN

PROBLEMA #01: (05 puntos)

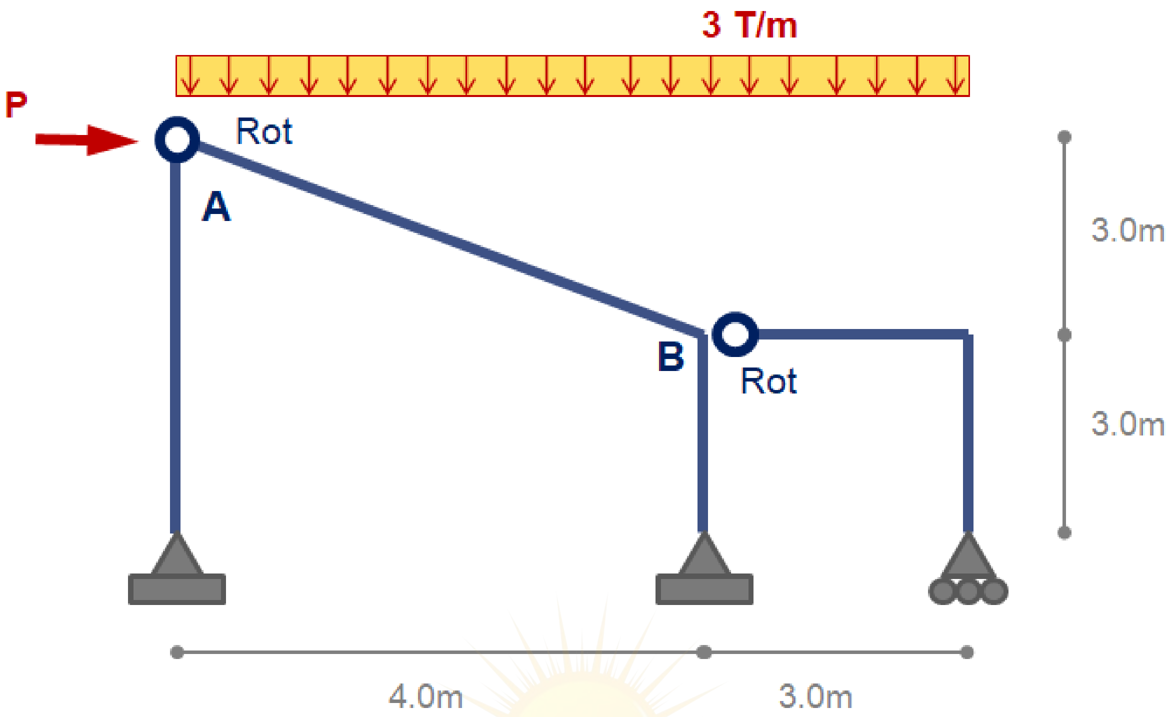
El pórtico ABCDE que se muestra incluye una rotula en el punto C y esta sometida a la carga concentrada y la carga distribuida mostradas. Se conoce que la rección vertical en el apoyo A es 3.65 kN y el momento de empotramiento en el apoyo E es 17.83 kN-m. Se pide:

a) Calcular todas las reacciones de los apoyos A y E.
b) Calcular las fuerzas internas transmitidas por la rotula.
c) Dibujar el DFN, DFC y DMF del pórtico.



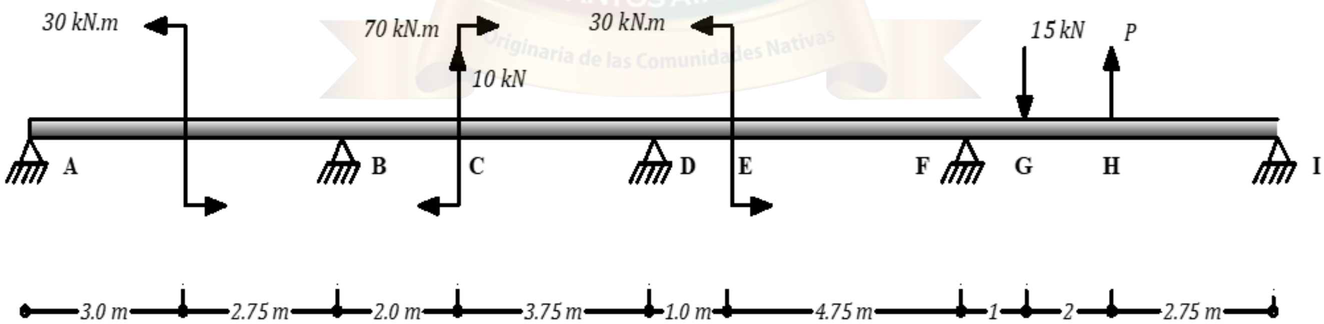
PROBLEMA #02: (05 puntos)

El pórtico ABCDE que se muestra, representa la elevación de una estructura industrial. Determine la máxima carga (P>0) que puede tomar si se sabe que la capacidad de soporte del suelo (presión máxima que se puede aplicar al suelo) es de 3.5 kg/cm² y las cimentaciones son de 1.5m x 1.5m. Para dicho valor de P determine las ecuaciones N(x), Q(x) y M(x) del elemento AB.



PROBLEMA #03: (05 puntos)

Utilizando el método Cross el nudo más desbalanceado, calcular los momentos finales en los apoyos (3P), la reacción en "F" (1P), y el momento en "H" (1P) utilizando el método de la sección, desarrolle el ejercicio colocando el desarrollo completo del problema de manera ordenada y sus respuestas en recuadros. Realizar 6 iteraciones.



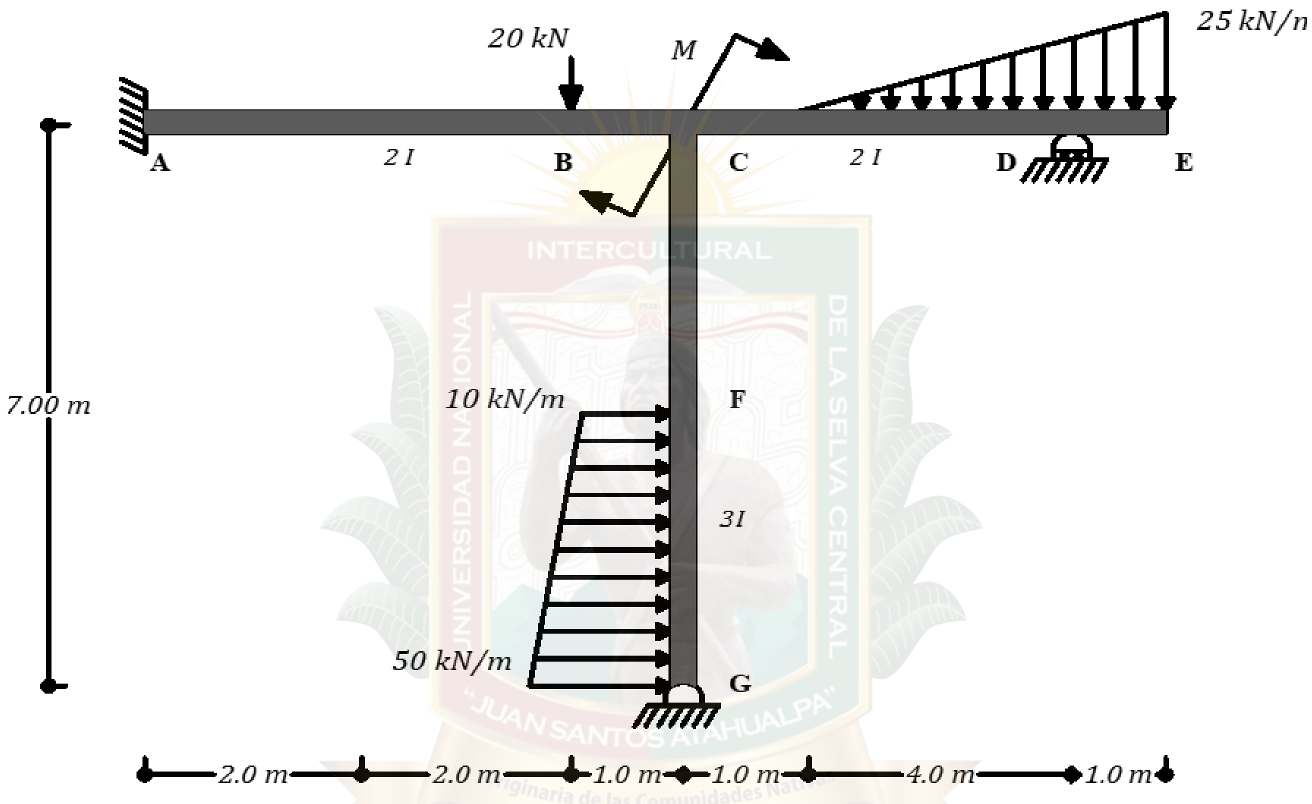
Fila A: P = 25000 N

Fila B: P = 35000 N

Fila C: P = 45000 N

PROBLEMA #04: (05 puntos)

Utilizando el método Cross simplificado, calcular los momentos finales en los apoyos (3P), y el diagrama de momento en "CG" (2P) utilizando el método de la sección, desarrolle el ejercicio colocando el desarrollo completo del problema de manera ordenada y sus respuestas en recuadros. Realizar 6 iteraciones.



Fila A: M = 60 kN-m

Fila B: M = 70 kN-m

Fila C: M = 80 kN-m

BIBLIOGRÁFIA REFERENCIAL

- Gamio L. (2015). Resistencia de Materiales: teoría y aplicaciones; Ed. Macro. Perú
- Beer F. Russell J. (2009). Mecánica de Materiales; Ed. Mc Graw Hill.
- Stephen P Timoshenko. Resistencia de materiales. 6ta edición. Editorial Paraninfo. Madrid, 2009.
- Herrera, Ignacio (2011). Resistencia de materiales II. 2da edición. Editorial Bellisco. Madrid.
- Hibbeler, R.C. (2010).Mecánica de Materiales Ed. Pretince Hall. 12va Edición. México.
- Beer & Johnston (2010) Mecánica de Materiales Ed. Mc.Graw Hill, 9na. Edición
- Stiopin P.A. Resistencia de Materiales Ed. MIR Moscú 1976, Segunda Edición
- Gere-Timoshenko (1986). Mecánica de Materiales Grupo Editorial Ibero América, Segunda Edición.
- Singer, Ferdinand (1982). Resistencia de Materiales Ed. HARLA, Tercera Edición


UNIVERSIDAD NACIONAL
INTERCULTURAL
DE LA SELVA CENTRAL
PERÚ
"JUAN SANTOS ATAHUALPA"
Originaria de las Comunidades Nativas